**مبرهنة :** إذا كان $A:B\to B$ مؤثرا خطيا بحيث $\|A\|<1$ فإن $(I-A)^{-1}$ موجود في $L(B,B)$

ويكون $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n=I+A+A^2+A^3+\dots$ . متسلسلة هندسية ،

**الإثبات :** تكن المتتالية $\left\{S_N=\sum_{n=0}^{N}A^n\right\}_{N=1}^{\infty}$ وبما أن $\sum_{n=0}^{\infty}1=\infty$ فإن $\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n<\sum_{n=0}^{\infty}1=\infty$

$\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\|<\infty$ وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}A^n$ متقاربة مطلقا ضمن الشرط $\|A\|<1$ في الفضاء

$L(B,B)$ ( الذي هو فضاء باناخ ) وبالتالي تكون المتسلسة $\sum_{n=0}^{\infty}A^n$ متقاربة ( حسب مبرهنة واردة في

التحليل التابعي واحد ) ولنفرض $S=\lim_{N\to\infty}S_N=\sum_{n=0}^{\infty}A^n$ فعندئذٍ يكون :

$$(I-A)S_N=(I-A)(I+A+A^2+A^3+\dots+A^N)=$$
$$=(I+A+A^2+A^3+\dots+A^N)-(A+A^2+A^3+\dots+A^{N+1})=I-A^{N+1}$$

كما أن :

$$S_N(I-A)=(I+A+A^2+A^3+\dots+A^N)(I-A)=$$
$$=(I+A+A^2+A^3+\dots+A^N)-(A+A^2+A^3+\dots+A^{N+1})=I-A^{N+1}$$

وبالتالي : $S_N(I-A)=I-A^{N+1}=(I-A)S_N$

بأخذ النهايات نجد أن :

$$\lim_{N\to\infty}S_N(I-A)=I-\lim_{N\to\infty}A^{N+1}=(I-A)\lim_{N\to\infty}S_N$$

وبما أن $\lim_{N\to\infty}\|A^{N+1}\|\le\lim_{N\to\infty}\|A\|^{N+1}\overset{\|A\|<1}{=}0$ وبالتالي $\lim_{N\to\infty}A^{N+1}=0$ نعوض فيما سبق بالأخذ

بعين الاعتبار أن $S=\lim_{N\to\infty}S_N$ نجد أن : $S(I-A)=I=(I-A)S$

# المحاضرة (٧)

٢٠١٣/٤/٧

## طيف المؤثر

**تعاريف( القيم الذاتية ) ( القيم الخاصة ) – ( الأشعة الذاتية ) ( العناصر الخاصة ) – الفضاء الذاتي:**

إذا وجد $A: X \to Y$ للمؤثر الخطي ( قيمة ذاتية ) ندعو العدد $\lambda \in C$ أنه قيمة خاصة ( قيمة ذاتية ) للمؤثر الخطي $A: X \to Y$ إذا وجد عنصر $0 \neq x \in X$ يحقق $Ax = \lambda x$ وندعو العنصر $x$ عنصرا خاصا ( شعاعا ذاتيا ) للمؤثر $A$ موافقا للقيمة الخاصة $\lambda$ .

**نتيجة :** إذا كان $x$ عنصرا خاصا ( شعاعا ذاتيا ) للمؤثر $A$ موافقا للقيمة الخاصة $\lambda$ فإن $\alpha x$ هو شعاع ذاتي موافق لنفس القيمة الذاتية لأن $A(\alpha x) = \alpha A(x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$ .

وبالتالي فإن الأشعة الذاتية تولد يسمى **بالفضاء الذاتي** الموافق للقيمة الذاتية $\lambda$ ونرمز له بالرمز $N(A-\lambda I)$ ( وهو نواة المؤثر $A-\lambda I$ ) لأن $(A-\lambda I)x = Ax - \lambda x = 0$ ، وبالتالي يكون لدينا :

$$N(A-\lambda I) = \{0, \alpha x \quad , \quad Ax = \lambda x \quad or \quad (A-\lambda I)x = 0\}$$

وهي **فضاء خطي جزني** في المنطلق لأن $ax + by \in N(A-\lambda I)$ أيا كان $x, y \in N(A-\lambda I)$ و $a, b \in C$ لأن $(A-\lambda I)(ax+by) = a(A-\lambda I)x + b(A-\lambda I)y = 0 + 0 = 0$ .

**مبرهنة :** العناصر الخاصة الموافقة لقيم خاصة مختلفة تكون مستقلة خطيا .

**الاثبات :** لتكن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ قيمتان خاصتان للمؤثر الخطي $A$ وليكن $x_1$ شعاع ذاتي موافق للقيمة الخاصة $\lambda_1$ و $x_2$ شعاع ذاتي موافق للقيمة الخاصة $\lambda_2$ فيكون $Ax_2 = \lambda_2 x_2 \quad , \quad Ax_1 = \lambda_1 x_1$ ولنفرض جدلا أن $x_1, x_2$ مرتبطين خطيا عندئذٍ يكون $x_1 = \alpha x_2$ وبالتالي :

$$\lambda_1 x_1 = Ax_1 = A(\alpha x_2) = \alpha A(x_2) = \alpha \lambda_2 x_2 = \lambda_2(\alpha x_2) = \lambda_2 x_1 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = 0 \overset{x_1 \neq 0}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2$$ و

هذا تناقض .

**تذكير :** يكون $(A-\lambda I)^{-1}$ موجود إذا كان $N(A-\lambda I) = \{0\}$

$(3 \longrightarrow 1)$ واضح.

**مبرهنة :** ليكن $A : B \to Y$ بحيث يوجد عدد $c > 0$ بحيث $\|Ax\| \geq c\|x\|$ عندئذ تكون $R(A)$ مغلقة في $Y$ ، حيث $B$ فضاء باناخ ، $Y$ فضاء خطي منتظم .

**الإثبات :** لتكن $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $R(A)$ ولتكن $\lim_{n \to \infty} y_n = y \in Y$ (فهي أساسية ) ولنثبت أن $\lim_{n \to \infty} y_n = y \in R(A)$ ، توجد متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث $n = 1,2,...$ ,  $y_n = Ax_n$ وبالتالي :

$$c\|x_n - x_m\| \leq \|A(x_n - x_m)\| = \|Ax_n - Ax_m\| = \|y_n - y_m\| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في الفضاء $B$ (فضاء باناخ ) فهي متقاربة من عنصر من $B$ وليكن $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in B$ وبالتالي بما أن $A$ محدود ( حسب المبرهنة السابقة ) فهو مستمر وبالتالي $\lim_{n \to \infty} Ax_n = Ax \in R(A)$ أي أن $\lim_{n \to \infty} y_n = y \in R(A)$ وهو المطلوب .

**ملاحظة :** في حال كانت $R(A)$ كثيفة في $Y$ فإن $R(A) = \overline{R(A)} = Y$ وبالتالي من المبرهنة السابقة نلاحظ أنه $A : B \to Y$ بحيث يوجد عدد $c > 0$ بحيث $\|Ax\| \geq c\|x\|$ وكانت $R(A)$ كثيفة في $Y$ عندئذ $R(A) = Y$ وهذا يعني أن $A$ غامر .

ومن المبرهنة قبل السابقة نجد أن الشرط $\|Ax\| \geq c\|x\|$ يكافئ وجود $A^{-1}$ ومنه النتيجة التالية :

**نتيجة :** يكون المؤثر $A : X \to Y$ غير قابل للعكس إذا كانت $R(A)$ غير كثيفة في $Y$ .

**نتيجة :** يكون المؤثر $A : X \to Y$ غير قابل للعكس إذا وجدت متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ في $X$ بحيث $\|x_n\| = 1$ وبحيث $\lim_{n \to \infty} Ax_n = 0$ .

**الإثبات :** لنفرض جدلاً أن $A$ قابل للعكس وهذا يعني أنه يوجد عدد $c > 0$ بحيث $\|Ax\| \geq c\|x\|$ وبالتالي $c = \lim_{n \to \infty} \|x_n\| c \leq \lim_{n \to \infty} \|Ax_n\| = \left\|\lim_{n \to \infty} Ax_n\right\| = 0$ وهذا تناقض مع $c > 0$ .

**مبرهنة :** إذا كان $X,Y$ فضائين متريين وكان $T:X\to Y$ تطبيق مستمر فعندئذٍ من أجل كل مجموعة متراصة $M\subset X$ تكون $T(M)\subset Y$ متراصة .

**الإثبات :** لتكن $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية اختيارية من $T(M)$ فتوجد متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$ بحيث يكون $n=1,2,\ldots \quad , \quad y_n=Ax_n$ وبما أن $M$ متراصة فتوجد متتالية جزئية من $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ وهي $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة من عنصر من $M$ أي $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0\in M$ وبما أن $T$ مستمر فإن $\lim\limits_{k\to\infty} Tx_{n_k}=Tx_0\in T(M)$ وبما أن $\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ فتوجد في $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة من عنصر من $T(M)$ أي أن $T(M)$ متراصة وهو المطلوب .

**تمهيدية :** $A:X\to Y$ مؤثر خطي فإن $\|Ax\|\ge\|A^{-1}\|^{-1}\|x\|$ .

**الإثبات :** $\|Ax\|\ge\|A^{-1}\|^{-1}\|x\| \quad\Rightarrow\quad \|x\|=\|A^{-1}Ax\|\le\|A^{-1}\|\|Ax\|$

**مبرهنة :** إذا كان $A:D(A)\to Y$ حيث $D(A)\subset X$ عندئذٍ البنود التالية متكافئة :

1. $A^{-1}$ موجود .
2. $N(A)=\{0\}$ .
3. يوجد عدد $c>0$ بحيث $\|Ax\|\ge c\|x\|$ .

**الإثبات :** $(1\longrightarrow 2)$ واضح لأن :

$A^{-1}$ موجود فإن $A$ تقابل فهو متباين ومنه إذا كان $x\in N(A)$ فإن $Ax=0=A(0)$ فإن $x=0$ ومنه $N(A)=\{0\}$ .

$(2\longrightarrow 3)$ لدينا : $\quad 0=\|0\|=\|x-x\|=\|x-A^{-1}Ax\|\ge\|x\|-\|A^{-1}Ax\|$

وبالتالي :

$$\|x\|-\|A^{-1}Ax\|\le 0 \;\Rightarrow\; \|x\|\le\|A^{-1}Ax\|\le\|A^{-1}\|\|Ax\| \;\Rightarrow\; \|Ax\|\ge c\|x\| \;,\; c=\|A^{-1}\|^{-1}>0$$

**كفاية الشرط :** بفرض $A$ متراص ، ولنأخذ صورة كرة الواحدة في $H$ وفق $A$ وبما أن $A$ متراص فإن $A(K)$ شبه متراصة حيث $A(K)=\{y=Ax\in H;\|x\|=1\}$ وبالتالي يمكن من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ إيجاد شبكة- $\varepsilon$ منتهية لـ $A(K)$ وهي $N=\{x_1,x_2,\dots,x_{n(\varepsilon)}\}$ والعناصر $x_1,x_2,\dots,x_{n(\varepsilon)}$ تولد فضاء جزئي منتهي لـ $H$ ونرمز له بـ $H_\varepsilon$ وهو فضاء مغلق وتام في $H$ وبالتالي فإننا يمكن أن نكتب $H=H_\varepsilon\oplus H_\varepsilon^{\perp}$ ولنرمز بـ $A_\varepsilon=P_\varepsilon A$ مؤثر الإسقاط لـ $A$ فأهم ميزة في $A_\varepsilon$ أنه منتهي البعد وبعده $\dim(R(A_\varepsilon))\le n(\varepsilon)$ وبالتالي من أجل $x\in H;\|x\|=1$ يكون :

$$\|Ax-A_\varepsilon x\|=\|Ax-P_\varepsilon Ax\|\le\min_{z\in H_\varepsilon}\|Ax-z\|<\varepsilon \quad , \quad z=P_\varepsilon Ax$$

وبالتالي :

$$\|A-A_\varepsilon\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax-A_\varepsilon x\|<\varepsilon$$

أي أن $A$ هو نهاية للمتتالية من المؤثرات الخطية المنتهية البعد $A_\varepsilon;\varepsilon>0$ وهو المطلوب .

2. **لزوم الشرط :** إذا كان $A^*$ متراص فإن $A=(A^*)^*$ متراص .

**كفاية الشرط :** بفرض $A$ متراص فكما أثبتنا في الطلب الأول يمكن إيجاد متتالية من المؤثرات المنتهية البعد $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث يكون $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0$ وبما أن $A_n$ منتهية البعد فإن $A_n^*$ منتهية البعد وبالتالي وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n^*-A^*\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|(A_n-A)^*\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0$ فإن $A^*$ هو نهاية لمتتالية المؤثرات المنتهية البعد $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ عندئذٍ فهو متراص .

**نتيجة :** يكون المؤثر الخطي والمحدود $A:H\to H$ إذا وفقط إذا وجد من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ مؤثر متراص ( منتهي البعد ) $A_\varepsilon$ بحيث يكون $\|A-A_\varepsilon\|<\varepsilon$ .

**مبرهنة :** إذا كان $A:X\to Y$ مؤثر متراص وكانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بضعف من $x_0$ فإن $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بقوة من $Ax_0$ .

**إثبات أنها مستمرة بنفس الدرجة :** ليكن $\varepsilon > 0$ فمن أجل $|x-x'| < \delta$ ، وبما أن النواة $K(x,y)$ مستمرة فإن $|K(x,y)-K(x',y)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{q}} c_1}$ وبالتالي يكون :

$$|(Af)(x)-(Af)(x')| = \left|\int_a^b K(x,y)f(y)dy - \int_a^b K(x',y)f(y)dy\right| =$$

$$= \left|\int_a^b [K(x,y)-K(x',y)]f(y)dy\right| \le \int_a^b |K(x,y)-K(x',y)||f(y)|dy <$$

$$< \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{q}} c_1}\int_a^b |f(y)|dy = \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{q}} c_1}\int_a^b 1.|f(y)|dy \le \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{q}} c_1}\left(\int_a^b |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b 1^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{q}} c_1}\|f\|\left(x|_a^b\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{q}} c_1}\|f\|(b-a)^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{q}} c_1} c_1 (b-a)^{\frac{1}{q}} = \varepsilon$$

وبالتالي $|(Af)(x)-(Af)(x')| < \varepsilon$ وبما أن $\varepsilon$ غير متعلقة باختيار $x$ فإن توابع $A(M)$ مستمرة بنفس الدرجة في $L_p[a,b]$ .

وبالتالي $A(M)$ شبه متراصة في $L_2[a,b]$ أي أن $A$ متراص .

**مبرهنة :** إذا كان $A: H \to H$ مؤثر خطي ومحدود عندئذٍ يكون :

1. يكون $A$ إذا وفقط إذا كان نهاية لمتتالية متقاربة من المؤثرات الخطية المنتهية البعد .

2. يكون $A$ متراص إذا وفقط إذا كان $A^*$ متراص .

**الإثبات :** 1. **لزوم الشرط :** لتكن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من المؤثرات الخطية المنتهية البعد وبفرض $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ عندئذٍ وحسب مبرهنة سابقة يكون كل منها مؤثراً متراصاً وبالتالي فإن نهاية هذه المتتالية حسب مبرهنة سابقة هو مؤثر متراص أي أن $A$ متراص .

$$A : L_p[a,b] \longrightarrow L_r[a,b] : f \mapsto Af : Af(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy \quad , \quad 1 < p, r < \infty$$

أثبت أن محدود ومتراص ، حيث $K(x,t)$ محدودة على المربع $[a,b]\times[a,b]$ .

**الحل :** لنفرض أن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ وبالاستفادة من أن $|K(x,t)| < c_1$ ( لأنها مستمرة فهي محدودة ) :

**إثبات المحدودية :**

$$\|Af\|^r = \int_a^b |(Af)(x)|^r dx = \int_a^b \left| \int_a^b K(x,y) f(y) dy \right|^r dx \le \int_a^b \left( \int_a^b |K(x,y) f(y)| dy \right)^r dx \le$$

$$\le \int_a^b \left[ \left( \int_a^b |f(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} dy \times \left( \int_a^b |K(x,y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \right]^r dx = \int_a^b \left( \int_a^b |f(y)|^p \right)^{\frac{r}{p}} dy \times \left( \int_a^b |K(x,y)|^q dy \right)^{\frac{r}{q}} dx =$$

$$= \|f\|^r \int_a^b \left( \int_a^b |K(x,y)|^q dy \right)^{\frac{r}{q}} dx < c^q \|f\|^r \int_a^b \left( \int_a^b dy \right)^{\frac{r}{q}} dx = c_1^q \|f\|^r (b-a)^{\frac{r}{q}} (b-a) = c^r \|f\|^r$$

وبالتالي $\|Af\|^r = c^r \|f\|^r$ أي أن $\|Af\| = c\|f\|$ فهو محدود .

**إثبات التراص :**

لتكن $M$ مجموعة محدودة في $L_2[a,b]$ وبالتالي فإن

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|^2 dx < c_1 \quad , \quad c_1 > 0 \quad , \quad \forall f \in M$$

ولنبين أن المجموعة $A(M) = \{(Af)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy ; f \in M\}$ شبه متراصة ولأجل ذلك

(حسب مبرهنة سابقة ) يكفي أن نبين أنها محدودة وأن توابعها مستمرة بنفس الدرجة وذلك كما يلي :

**إثبات محدودة :** بما أن $A$ محدود فهو يصور كل مجموعة محدودة بمجموعة محدودة إذن $A(M)$ محدودة .

16/15 ثاني

**تمرين :** ليكن $K(x,t) = \alpha \sin(x-t)$ ، أثبت أنه من أجل كل تابع $g(x)$ يوجد تابع $f(x)$ بحيث يكون :

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$$

**الحل :** لنأخذ المؤثر $A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1] : f \mapsto Af : Af(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$

فإن هذا المؤثر خطي ومحدود :

**خطي لأن :**

$$A(af+bg)(x) = \int_a^b K(x,y)(af+bg)(y)dy = \int_a^b K(x,y) af(y)dy + \int_a^b K(x,y) bg(y)dy =$$

$$= a\int_a^b K(x,y) f(y)dy + b\int_a^b K(x,y) g(y)dy = aAf(x) + bAg(x) = (aAf + bAg)(x)$$

$$\Rightarrow \quad A(af+bg) = aAf + bAg$$

**ومحدود لأن :**

$$\|Af\| = \max_{x\in[0,1]} |Af(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 K(x,y) f(y) dy \right| \le \max_{x\in[0,1]} |K(x,y)| \max_{x\in[0,1]} |f(x)| =$$

$$= \max_{x\in[0,1]} |\alpha \sin(x-t)| \|f\| \le |\alpha| \|f\|$$

وبما أن $A$ خطي ومحدود فإنه حسب مبرهنة سابقة يكون $(I-A)^{-1}$ موجود ومحدود وبالتالي وبما أن

$$f = g + Af \quad \Rightarrow \quad f - Af = g \quad \Rightarrow \quad (I-A)f = g \quad \Rightarrow \quad f = (I-A)^{-1} g$$

وبالتالي يكون $f$ موجود وهو المطلوب .

**تمرين :** ليكن المؤثر :

ولنبين أنها كذلك مستمرة بنفس الدرجة : ليكن $\varepsilon > 0$ اختياري ولنأخذ $\delta = \varepsilon$ فنجد أنه أيا كان $x, x' \in [0,1]$ وبحيث $|x - x'| < \delta = \varepsilon$ فيكون :

$$|g(x) - g(x')| = \left|\int_0^x f(t)dt - \int_0^{x'} f(t)dt\right| = \left|\int_{x'}^{x} f(t)dt\right| \leq \max_{t\in[0,1]}|f(t)|\left|\int_{x'}^{x} dt\right| =$$

$$= \|f\|\left|t\,\Big|_{x'}^{x}\right| = \|f\||x - x'| \leq |x - x'| < \varepsilon$$

وبالتالي أمكن إيجاد $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ بحيث تتحقق شروط مبرهنة أرزيلا – إسكولي وبالتالي توابع $M$ مستمرة بنفس الدرجة في $C[0,1]$ أي أن $M$ شبه متراصة في $C[0,1]$.

**تمرين :** ليكن $0 < \alpha \leq 1$ ولنرمز بـ $C_\alpha[a,b]$ لمجموعة كل التوابع $f(x)$ المعرفة على المجال $[a,b]$ والمحققة للمتراجحة التالية ( شرط هولدر ) :

$$|f(x) - f(x')| < k|x - x'|^\alpha \quad , \quad k > 0$$

فما هي المجموعات شبه المتراصة في هذا الفضاء ؟

**الحل :** لتكن $M$ مجموعة اختيارية من هذا الفضاء و ليكن $\varepsilon > 0$ اختياري ولنأخذ $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ فنجد أنه أيا كان $x, x' \in [a,b]$ وبحيث $|x - x'| < \delta = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ فيكون :

$$|f(x) - f(x')| < k|x - x'|^\alpha < k\delta^\alpha = k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

وبالتالي أمكن إيجاد $\delta = \delta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ بحيث تحقق $M$ الاختيارية من $C_\alpha[a,b]$ الشرط الثاني من شروط مبرهنة أرزيلا – إسكولي ، وبقي الشرط الأول إن تحقق فالمجموعة شبه متراصة أي أن أي مجموعة محدودة بانتظام في هذا الفضاء تكون شبه متراصة .

$$|f_n(x)-f_n(x')| = \left|0-\sin n\frac{\pi}{2n}\right| = \left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 1$$

وبالتالي لا يمكن إيجاد $\delta=\delta(\varepsilon)$ بحيث تتحقق شروط مبرهنة ( أرزيلا – إسكولي ) وبالتالي توابع $M$ ليست مستمرة بنفس الدرجة في $C[0,\pi]$ أي أن $M$ ليست شبه متراصة في $C[0,\pi]$.

**تمرين :** هل المجموعة $M=\{f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2};n=1,2,...\}$ شبه متراصة في $C[0,1]$ ؟

**الحل :** إن هذه المجموعة محدودة لأن $\|f_n\| = \max_{x\in[0,1]}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| < \frac{1}{n} \le 1$ وذلك أيا $f_n(x)\in M$ .

ولنبين أنها ليست مستمرة بنفس الدرجة : لو أخذنا $x=0, x'=\frac{1}{n}$ فإن :

$$|f_n(x)-f_n(x')| = \left|0-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

وبالتالي لا يمكن إيجاد $\delta=\delta(\varepsilon)$ بحيث تتحقق شروط مبرهنة أرزيلا – إسكولي وبالتالي توابع $M$ ليست مستمرة بنفس الدرجة في $C[0,1]$ أي أن $M$ ليست شبه متراصة في $C[0,1]$.

**تمرين :** لنأخذ المجموعة $\overline{K}(0,1)=\{f\in C[0,1];\|f\|\le 1\}$ ولنعرف المجموعة $M=\{g(x)=\int_0^x f(t)dt; f\in M\}$ فهل $M$ شبه متراصة في $C[0,1]$ ؟

**الحل :** إن هذه المجموعة محدودة لأن :

$$\|g\| = \left\|\int_0^x f(t)dt\right\| = \max_{x\in[0,1]}\left\|\int_0^x f(t)dt\right\| \le \max_{x\in[0,1]}\left\|\max_{t\in[0,1]} f(t)\int_0^x dt\right\| =$$

$$= \max_{x\in[0,1]}\left\|\|f\|\int_0^x dt\right\| = \|f\|\max_{x\in[0,1]}\left\|\int_0^x dt\right\| \le \max_{x\in[0,1]}\|x\| = 1$$

وذلك أيا $g(x)\in M$ .

$$|(Af)(x)| = \left|\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right| \le \int_a^b |K(x,y)||f(y)|dy \le c_2\int_a^b |f(y)|dy \le$$

$$\le c_2 \max_{x\in[a,b]}|f(y)|\int_a^b dy = c_2\|f\|(b-a) < c_2c_1(b-a) = c_3$$

أي أن $|(Af)(x)| < c_3$ وبالتالي $A(M)$ محدودة .

**<u>إثبات أنها مستمرة بنفس الدرجة :</u>** ليكن $\varepsilon > 0$ فمن أجل $|x-x'| < \delta$ ، وبما أن النواة $K(x,y)$ مستمرة فإن $|K(x,y)-K(x',y)| < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)c_1}$ وبالتالي يكون

$$|(Af)(x)-(Af)(x')| = \left|\int_a^b K(x,y)f(y)dy - \int_a^b K(x',y)f(y)dy\right| =$$

$$\left|\int_a^b [K(x,y)-K(x',y)]f(y)dy\right| \le \int_a^b |K(x,y)-K(x',y)||f(y)|dy <$$

$$< \frac{\varepsilon}{(b-a)c_1}\max_{x\in[a,b]}\int_a^b dy = \frac{\varepsilon}{(b-a)c_1}\|f\|(b-a) = \frac{\varepsilon}{c_1}\|f\| < \frac{\varepsilon}{c_1}c_1 = \varepsilon$$

وبالتالي $|(Af)(x)-(Af)(x')| < \varepsilon$ وبما أن $\varepsilon$ غير متعلقة باختيار $x$ فإن توابع $A(M)$ مستمرة بنفس الدرجة في $C[a,b]$ .

وبالتالي $A(M)$ شبه متراصة في $C[a,b]$ أي أن $A$ متراص .

**<u>تمرين :</u>** هل المجموعة $M = \{f_n(x) = \sin nx; n = 1,2,\ldots\}$ شبه متراصة في $C[0,\pi]$ ؟

**<u>الحل :</u>** إن هذه المجموعة محدودة لأن $\|f_n\| = \max_{x\in[0,\pi]}|\sin nx| = 1$ وذلك أيا $f_n(x) \in M$ .

ولنبين أنها ليست مستمرة بنفس الدرجة : لو أخذنا $x = 0, x' = \dfrac{\pi}{2n}$ فإن :

$$|(Af)(x)-(Af)(x')| = \left|\int_a^b K(x,y)f(y)dy - \int_a^b K(x',y)f(y)dy\right| =$$

$$\left|\int_a^b [K(x,y)-K(x',y)]f(y)dy\right| \le \int_a^b |K(x,y)-K(x',y)||f(y)|dy <$$

$$< \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{2}}c_1}\int_a^b |f(y)|dy = \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{2}}c_1}\int_a^b 1.|f(y)|dy \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{2}}c_1}\left(\int_a^b |f(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_a^b 1^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{2}}c_1}\|f\|\left(x|_a^b\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{2}}c_1}\|f\|(b-a)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{2}}c_1}c_1(b-a)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

وبالتالي $|(Af)(x)-(Af)(x')| < \varepsilon$ وبما أن $\varepsilon$ غير متعلقة باختيار $x$ فإن توابع $A(M)$ مستمرة بنفس الدرجة في $L_2[a,b]$ . وبالتالي $A(M)$ شبه متراصة في $L_2[a,b]$ أي أن $A$ متراص .

**تمرين :** ليكن المؤثر :

$$A: C[a,b] \longrightarrow C[a,b] : f \mapsto Af : Af(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]}|f(x)| \quad , \quad f \in C[a,b] \quad , \quad K(x,y) \in C([a,b]\times[a,b])$$

أثبت أن $A$ متراص .

**الحل :** لتكن $M$ مجموعة محدودة في $C[a,b]$ وبالتالي فإن

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]}|f(x)| < c_1 \quad , \quad c_1 > 0 \quad , \quad \forall f \in M$$

ولنبين أن المجموعة $A(M) = \{(Af)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy; f \in M\}$ شبه متراصة ولأجل ذلك (حسب مبرهنة أرزيلا – إسكولي ) يكفي أن نبين أنها محدودة وأن توابعها مستمرة بنفس الدرجة كما يلي :

**إثبات محدودة :** بما أن $K(x,y)$ مستمرة فهي محدودة وبالتالي $|K(x,y)| \le c_2$ وبالتالي يكون لدينا :

وبالتالي : $\|Af\|^2 < c^2\|f\|^2 \Rightarrow \|Af\| < c\|f\|$

**إثبات التراص :**

لتكن $M$ مجموعة محدودة في $L_2[a,b]$ وبالتالي فإن

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|^2 dx < c_1 \quad , \quad c_1 > 0 \quad , \quad \forall f \in M$$

ولنبين أن المجموعة $A(M) = \{(Af)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy; f \in M\}$ شبه متراصة ولأجل ذلك

(حسب مبرهنة سابقة ) يكفي أن نبين أنها محدودة وأن توابعها مستمرة بنفس الدرجة وذلك كما يلي :

**إثبات محدودة :** بما أن $K(x,y)$ مستمرة فهي محدودة وبالتالي $|K(x,y)| \le c_2$ وبالتالي يكون لدينا :

$$|(Af)(x)| = \left|\int_a^b K(x,y) f(y) dy\right| \le \int_a^b |K(x,y)||f(y)| dy \le c_2 \int_a^b |f(y)| dy = c_2 \int_a^b 1 \cdot |f(y)| dy \le$$

$$\le c_2 \left(\int_a^b |f(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_a^b 1^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} = c_2 \|f\| \left(x|_a^b\right)^{\frac{1}{2}} = c_2 \|f\| (b-a)^{\frac{1}{2}} < c_2 c_1 (b-a)^{\frac{1}{2}} = c_3$$

أي أن $|(Af)(x)| < c_3$ وبالتالي $A(M)$ محدودة .

**إثبات أنها مستمرة بنفس الدرجة :** ليكن $\varepsilon > 0$ فمن أجل $|x - x'| < \delta$ ، وبما أن النواة $K(x,y)$

مستمرة فإن $|K(x,y) - K(x',y)| < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{2}} c_1}$ وبالتالي يكون :

يكون $\|y_n - y_{n_k}\| > \varepsilon$ ، وبما أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بضعف من $x$ تكون محدودة وبذلك تملك متتالية جزئية متقاربة $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ وبما أن $A$ متراص فإن $\{y_{n_k} = Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ تملك متتالية جزئية متقاربة من نقطة ولتكن $\overline{y}$ وبما أن نقطة التقارب وحيدة فإن $y_n \longrightarrow y$ والفرض الجدلي خاطئ .

**تمرين :** ليكن المؤثر : $A : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b] : f \mapsto Af : Af(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy$

$$f \in L_2[a,b] \quad , \quad K(x,y) \in L_2([a,b]\times[a,b])$$

أثبت أن $A$ خطي ومحدود ومتراص .

**الحل :**

**إثبات الخطية :**

$$A(af+bg)(x) = \int_a^b K(x,y)(af+bg)(y)dy = \int_a^b K(x,y)af(y)dy + \int_a^b K(x,y)bg(y)dy =$$

$$= a\int_a^b K(x,y)f(y)dy + b\int_a^b K(x,y)g(y)dy = aAf(x) + bAg(x) = (aAf + bAg)(x)$$

$$\Rightarrow \quad A(af+bg) = aAf + bAg$$

**إثبات المحدودية :**

$$\|Af\|^2 = \int_a^b |(Af)(x)|^2 dx = \int_a^b \left|\int_a^b K(x,y) f(y)dy\right|^2 dx \le \int_a^b \left[\int_a^b |f(y)|^2 dy \times \int_a^b |K(x,y)|^2 dy\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[\|f\|^2 \times \int_a^b |K(x,y)|^2 dy\right] dx = \|f\|^2 \int_a^b \left[\int_a^b |K(x,y)|^2 dy\right] dx = \|f\|^2 \int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy$$

ولكن حسب الفرض فإن

$$K(x,y) \in L_2([a,b]\times[a,b]) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy < c^2 < \infty$$

**الحل :** $A_n:\ell_2 \longrightarrow \ell_2; A_n(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\xi_{n+3},...)$ وبفرض $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$

فإن $0 \xrightarrow[n\to\infty]{}$ $\|A_n x\| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^2}$ و إن $\|A_n x - Ax\| \le \|A_n x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ وبالتالي

$\|A_n x - Ax\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ فالمتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من $A$ ، ولنجد المؤثرات المرافقة لهذه المتتالية :

نفرض $y=(y_1,y_2,...)$ , $A^* y=(z_1,z_2,...)$ ونأخذ الجداء الداخلي في $X'$ كما هو معلوم $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ فنجد

$$\langle x, A_n^* y\rangle = \langle A_n x, y\rangle \Rightarrow \xi_1\overline{z_1}+\xi_2\overline{z_2}+\xi_3\overline{z_3}+...=\xi_{n+1}\overline{y_1}+\xi_{n+2}\overline{y_2}+\xi_{n+3}\overline{y_3}+....$$

بالمطابقة نجد $z_k = y_{k-n}; k=n,n+1,n+2,...$ $\wedge$ $z_k=0; k=1,2,3,4,...,n$ وبالتالي المؤثرات المرافقة : $A_n^*(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)=(\underbrace{0,0,...,0}_{n},\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)$ وبالتالي $\|y\|=\|A_n^* y\|$ أي أن

$$\|A_n^* y - A^* y\| \le \|A_n^* y\| = \|y\| \not\longrightarrow 0$$

**تمرين :** أثبت أنه إذا كان $A:X \longrightarrow Y$ مؤثر متراص فإن التقارب الضعيف في $X$ يؤول إلى تقارب قوي في $Y$ .

**الحل :** لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متقاربة بضعف من $x$ أي $x_n \xrightarrow{w} x$ لذلك يكون من أجل أي دالي خطي $f \in X'$ : $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ وبفرض $y_n = Ax_n, y=Ax$ فإن $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بضعف من $y$ وذلك لأن $(gA)x_n \xrightarrow{w} (gA)x$ حيث $(gA)$ دالي من $X'$ ولكن $(gA)x_n = g(Ax_n)=g(y_n) \xrightarrow{w} (gA)x = g(Ax)=g(y)$ وبالتالي $g(y_n)\xrightarrow{w} g(y)$

لنفرض $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ غير متقاربة بقوة من $y$ عندها توجد متتالية جزئية $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ من $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث

برهان الخطية :

$$A(af+bg)x = x(af+bg)x = x(afx+bgx) = xafx+xbgx =$$
$$= axfx+bxgx = aAfx+bAgx = (aAf+bAg)x \quad \Rightarrow \quad A(af+bg) = aAf+bAg$$

<u>تمرين :</u> إذا كان $S = B^{*}AB$ فاثبت أن $S$ مترافق ذاتيا إذا كان $A$ مترافق ذاتيا .

$$S^{*} = (B^{*}AB)^{*} = (AB)^{*}(B^{*})^{*} = B^{*}A^{*}B = B^{*}AB = S$$

<u>تمرين :</u> ليكن المؤثر :

$$A : C[0,\infty[ \longrightarrow C[0,\infty[ : f \mapsto Af : Af(x) = xf(x); \|f\| = \sup_{x\in[0,\infty[} |f(x)|$$

اثبت أنه خطي وغير محدود .

إثبات الخطية

$$A(af+bg)x = x(af+bg)x = x(afx+bgx) = xafx+xbgx =$$
$$= axfx+bxgx = aAfx+bAgx = (aAf+bAg)x \quad \Rightarrow \quad A(af+bg) = aAf+bAg$$

عدم المحدودية :

لو أخذنا المتتالية $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x}$ لوجدنا أن $\|f_n\| = \sup\limits_{x\in[0,\infty[} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,\infty[} \left|\dfrac{n}{n+x}\right| = 1$ ولكن

$$\|Af_n\| = \sup_{x\in[0,\infty[} \left|\frac{nx}{x+n}\right| = n$$

وبالتالي $\|A\| = \sup\limits_{\substack{|x|\le 1 \\ x\in[0,\infty[}} \|Af_n\| = \sup\limits_{\substack{|x|\le 1 \\ x\in[0,\infty[}} \|n\| = \infty$ وبالتالي $A$ غير محدود .

<u>تمرين :</u> أعط مثالاً تبين فيه أنه ليس من الضروري إذا تقاربت متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر $A$ أن تتقارب المتتالية $\{A_n^{*}\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر $A^{*}$ .

ولنبرهن وحدانية الشكل ، بفرض أن هناك شكلان مختلفان $A = A_1 + iA_2 , A = A_1' + iA_2'$ حيث $A_1, A_2, A_1', A_2'$ مترافقة ذاتيا عندئذ :

$$A_1 + iA_2 = A_1' + iA_2' \;\Rightarrow\; A_1 - A_1' = i(A_2' - A_2) \;\Rightarrow\; (A_1 - A_1')^* = A_1^* - A_1'^* = A_1 - A_1'$$

$$(A_1 - A_1')^* = (i(A_2' - A_2))^* = -i(A_2' - A_2) = -(A_1 - A_1')$$

وبالتالي :

$$A_1 - A_1' = -(A_1 - A_1') \;\Rightarrow\; 2(A_1 - A_1') = 0 \;\Rightarrow\; A_1 = A_1' \;\Rightarrow\; A_2 = A_2'$$

وهذا يعني أن الشكل وحيد ، وهو المطلوب .

<u>تمرين :</u> ليكن المؤثر : $A : L_2[0,1] \longrightarrow L_2[0,1] : f \mapsto Af : Af(x) = xf(x)$

أوجد $A^*$ ، وأثبت أنه خطي ومحدود .

إيجاد $A^*$ : نأخذ الجداء الداخلي في $L_2[0,1]$ كما هو معلوم $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ فنجد

$$\langle f, A^* g\rangle = \langle Af, g\rangle \;\Rightarrow\; \int_0^1 f(x)\overline{A^* g(x)}dx = \int_0^1 Af(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 xf(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 f(x)\overline{xg(x)}dx$$

بالمطابقة نجد $A^* g(x) = xg(x)$ وبالتالي المؤثر المرافق :

$$A^* g(x) = xg(x)$$

نلاحظ أن $A = A^*$ فهو مترافق ذاتيا .

برهان المحدودية : $\|Af\|^2 = \int_0^1 x^2 |f(x)|dx^2 \le \max_{0\le x\le 1}(x^2)\int_0^1 |f(x)|dx^2 = 1.\int_0^1 |f(x)|dx^2 = \|f\|^2$

وبالتالي $\|Af\| \le \|f\|$ فهو محدود .

5. $$A : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b] : f \mapsto Af : Af(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)dy$$

نأخذ الجداء الداخلي في $L_2[a,b]$ كما هو معلوم

$$\langle f, A^* g\rangle = \langle Af, g\rangle \;\Rightarrow\; \int_0^1 f(x)\overline{A^* g(x)}dx = \int_0^1 Af(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 xf(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 f(x)\overline{xg(x)}dx$$

فنجد

$$\langle f, A^* g\rangle = \langle Af, g\rangle \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\overline{A^* g(x)}dx = \int_a^b Af(x)\overline{g(x)}dx = \int_a^b\int_a^b K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dxdy =$$

$$= \int_a^b f(y)\left(\int_a^b K(x,y)\overline{g(x)}dx\right)dy = \int_a^b f(y)\left(\int_a^b \overline{\overline{K(x,y)}g(x)}dx\right)dy = \int_a^b f(y)\overline{\left(\int_a^b \overline{K(x,y)}g(x)dx\right)}dy$$

بالمطابقة نجد $A^* g(x) = \int_a^b \overline{K(x,y)}g(x)dx$ وبالتالي المؤثر المرافق :

$$A^* g(x) = \int_a^b \overline{K(x,y)}g(x)dx$$

<u>تمرين :</u> ليكن $A : H \to H$ مؤثر خطي ومحدود وليكن $A^*$ المؤثر المرافق له ، برهن أن $A, A^*$ يكتبان وبشكل وحيد على النحو : $A = A_1 + iA_2 , A^* = A_1 - iA_2$ حيث $A_1, A_2$ مترافقان ذاتيا .

<u>الحل :</u> لنفرض أن $A_1 = \frac{A + A^*}{2}$ و أن $A_2 = \frac{A - A^*}{2i}$ ولنثبت أن $A_1, A_2$ مترافقين ذاتيا :

$$A_1^* = \left(\frac{A + A^*}{2}\right)^* = \frac{A^* + A}{2} = A_1 \quad , \quad A_2^* = \left(\frac{A - A^*}{2i}\right)^* = \frac{A^* - A}{-2i} = \frac{A - A^*}{2i} = A_2$$

وهذا يعني أن $A_1, A_2$ مترافقان ذاتيا .

نلاحظ أن $A = A^*$ فهو مترافق ذاتيا .

3. $A:\ell_2 \longrightarrow \ell_2 : x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,...) \mapsto Ax=(0,0,\xi_3,\xi_4,...)$

نفرض $y=(y_1,y_2,...)$ , $A^*y=(z_1,z_2,...)$ ونأخذ الجداء الداخلي في $\ell_2$ كما هو معلوم $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y_i}$ فنجد

$$\langle x,A^*y\rangle=\langle Ax,y\rangle \;\Rightarrow\; \xi_1z_1+\xi_2z_2+\xi_3z_3+...=\xi_3y_3+\xi_4y_4+....$$

بالمطابقة نجد $z_1=z_2=0, z_n=y_n; n=3,4,...$ وبالتالي المؤثر المرافق :

$$A^*(y_1,y_2,y_3,...)=(0,0,y_3,y_4,y_5,...)$$

نلاحظ أن $A = A^*$ فهو مترافق ذاتيا .

4. $A:\ell_2 \longrightarrow \ell_2 : x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,...) \mapsto Ax=(\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\frac{\xi_3}{3},\frac{\xi_4}{4},...)$

نفرض $y=(y_1,y_2,...)$ , $A^*y=(z_1,z_2,...)$ ونأخذ الجداء الداخلي في $\ell_2$ كما هو معلوم $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y_i}$ فنجد

$$\langle x,A^*y\rangle=\langle Ax,y\rangle \;\Rightarrow\; \xi_1z_1+\xi_2z_2+\xi_3z_3+...=\xi_1\frac{y_1}{1}+\xi_2\frac{y_2}{2}+\xi_3\frac{y_3}{3}+....$$

بالمطابقة نجد $z_n=\frac{y_n}{n}; n=1,2,3,4,...$ وبالتالي المؤثر المرافق :

$$A^*(y_1,y_2,y_3,...)=(\frac{y_1}{1},\frac{y_2}{2},\frac{y_3}{3},\frac{y_4}{4},...)$$

نلاحظ أن $A = A^*$ فهو مترافق ذاتيا .

وليكن $x, y \in H$ فإن :

$$\langle x, A^* y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k^*\rangle e_k, y\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k^*\rangle \langle e_k, y\rangle = \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k\rangle e_k^*\right\rangle$$

وبالتالي :

$$A^* y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k\rangle e_k^*$$

وبالتالي $A^*$ منتهي البعد بحيث $\dim(R(A^*)) \le n = \dim(R(A))$ كما أن

$$\dim(R(A)) = \dim(R(A^*)^*) \le \dim(R(A^*))$$

من هاتين المتراجحتين نجد أن : $\dim(R(A^*)) = \dim(R(A)) = n$

**تمارين على إيجاد المرافق :**

أوجد المؤثر المرافق $A^*$ لكل من المؤثرات التالية :

1. $A : R^n \longrightarrow R^n : x \mapsto Ax = x$ (واضح أنه المؤثر المطابق فمرافقه نفسه) أو نكتب :

$$\langle x, A^* y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle \;\Rightarrow\; A^* y = y = Iy$$

2. $A : R^6 \longrightarrow R^6 : x = (x_1, x_2, \ldots, x_6) \mapsto Ax = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0)$

نفرض $y = (y_1, y_2, \ldots, y_6)$ , $A^* y = (z_1, z_2, \ldots, z_6)$ ونأخذ الجداء الداخلي في $R^6$ كما هو معلوم $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i$ فنجد

$$\langle x, A^* y\rangle = \langle Ax, y\rangle \;\Rightarrow\; x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_6 z_6 = x_1 y_1 + x_3 y_3 + x_5 y_5$$

بالمطابقة نجد $z_1 = y_1, z_2 = 0, z_3 = y_3, z_4 = 0, z_5 = y_5, z_6 = 0$ وبالتالي المؤثر المرافق :

$$A^*(y_1, y_2, \ldots, y_6) = (y_1, 0, y_3, 0, y_5, 0)$$

ويكون أيضاً :

$$\left\|Ax_{n_k}-Ax_{m_k}\right\|^2=\left\langle Ax_{n_k}-Ax_{m_k},Ax_{n_k}-Ax_{m_k}\right\rangle=\left\langle A(x_{n_k}-x_{m_k}),A(x_{n_k}-x_{m_k})\right\rangle=$$

$$=\left\langle x_{n_k}-x_{m_k},A^*A(x_{n_k}-x_{m_k})\right\rangle\le\left\|x_{n_k}-x_{m_k}\right\|\left\|A^*A(x_{n_k}-x_{m_k})\right\|\le(\left\|x_{n_k}\right\|+\left\|x_{m_k}\right\|)\left\|A^*A(x_{n_k}-x_{m_k})\right\|<$$

$$<2c\frac{\varepsilon^2}{2c}=\varepsilon^2 \quad\Rightarrow\quad \left\|Ax_{n_k}-Ax_{m_k}\right\|<\varepsilon$$

وهذا يعني أن $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية أساسية في $H$ ( فضاء تام ) فهي متقاربة وبالتالي ملكت المتتالية $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة هي $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ وبالتالي $A$ متراص وهو المطلوب .

**نتيجة :** يكون $A$ متراصاً إذا وفقط إذا كان $A^*$ متراصاً .

**الإثبات : لزوم الشرط :** واضح .

**كفاية الشرط :** إذا كان $A^*$ متراصاً فإن $A^*A$ متراص وبالتالي $A$ متراص .

**مبرهنة :** كل مؤثر منتهي البعد في فضاء هيلبرت يمكن تمثيله على الشكل :

$$A=\sum_{k=1}^{n}\left\langle x,e_k^*\right\rangle e_k \quad,\quad e_k^*=A^*e_k \quad,\quad k=1,2,\ldots,n \quad,\quad n=\dim(R(A))$$

ويكون $A^*$ منتهي البعد بحيث : $\quad A^*=\sum_{k=1}^{n}\left\langle x,e_k\right\rangle e_k^* \quad,\quad \dim(R(A^*))=\dim(R(A))=n$

**الإثبات :** بما أن $\dim(R(A))=n$ فتوجد قاعدة متعامدة نظامية مكونة من $n$ عنصر ولتكن $e_1,e_2,\ldots,e_n$ وبالتالي كل عنصر $y=Ax\in R(A)\subset H$ يكتب بشكل وحيد على النحو $Ax=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)e_k$ ولدينا :

$$\left\langle Ax,e_j\right\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n}a_k(x)e_k,e_j\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\left\langle e_k,e_j\right\rangle=a_j(x)$$

وبالتالي فإن :

$$a_j(x)=\left\langle Ax,e_j\right\rangle=\left\langle x,A^*e_j\right\rangle=\left\langle x,e_j^*\right\rangle$$

وبالتالي :

$$Ax=\sum_{k=1}^{n}\left\langle x,e_k^*\right\rangle e_k$$

٢٠١٣/٣/٣١

# المحاضرة (٦)

**المؤثر المرافق :**

$(Ax, y) = (x, A^* y)$

(*) ـ إذا كان $A$ مترافق ذاتياً ( $A = A^*$ ) فإن كل من $A^{-1}$ و $A^n$ و $A^{-n}$ مترافق ذاتياً .

لو كان $A = A^*$ فإن $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$ وهذا يعني أن $A^{-1}$ مترافق ذاتياً .

وكذلك $(A^n)^* = (A^*)^n = A^n$ وهذا يعني أن $A^n$ مترافق ذاتياً .

وكذلك $A^{-n} = (A^{-1})^n$ فهو مترافق ذاتياً .

(*) ـ كل من $AA^*$ و $A^*A$ مترافق ذاتياً .

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A \quad , \quad (AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^*$$

(*) ـ إذا كان $A$ ناظمياً ( $AA^* = A^*A$ ) فإن $A - \lambda I$ ناظمي وذلك أياً كان $\lambda \in C$ .

$$(A-\lambda I)(A-\lambda I)^* = (A-\lambda I)(A^* - \bar{\lambda} I^*) = (A-\lambda I)(A^* - \bar{\lambda} I) =$$
$$= AA^* - \bar{\lambda}(A-\lambda I) - \lambda A^* = A^*A - \bar{\lambda}(A-\lambda I) - \lambda A^* =$$
$$= A^*(A-\lambda I) - \bar{\lambda}(A-\lambda I) = (A^* - \bar{\lambda} I)(A-\lambda I) = (A-\lambda I)^*(A-\lambda I)$$

وهذا يعني أن $A - \lambda I$ ناظمي ، وهو المطلوب .

**مبرهنة :** إذا كان $A : H \to H$ مؤثر خطي ومحدود ، عندئذٍ يكون $A$ متراص إذا وفقط إذا كان $A^*A$ متراصاً .

فضاء هلبرت

**الإثبات : لزوم الشرط :** بما أن $A$ متراص و $A^*$ محدود فحسب مبرهنة يكون $A^*A$ متراص .

**كفاية الشرط :** لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة من $H$ فإن $\|x_n\| < c \;,\; c > 0 \;,\; n = 1,2,...$

وبالتالي يوجد في $\{A^*Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة $\{A^*Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ فهي أساسية وبالتالي

$$\forall \varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \;,\; \|A^*A(x_{n_k} - x_{m_k})\| < \frac{\varepsilon^2}{2c}$$

وبالتالي $TA$ متراص ، كما أنه من أجل أي متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة في $X$ تكون $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة في المستقر و $A$ متراص فإن $\{ATx_n\}_{n=1}^{\infty}$ شبه متراصة في المستقر

وبالتالي $AT$ متراص وهو المطلوب .

**نتيجة :** إذا كان $A: X \to X$ مؤثر متراص فإن $A^n$ متراص وذلك أيا كان $n = 2,3,...$ .

**الإثبات :** بالاستقراء الرياضي وبالاستفادة من المبرهنة السابقة

محدود

متراص

القضية محققة من أجل $n = 2$ لأن $A$ متراص فهو محدود وبالتالي $A^2 = AA$ أي أن $A^2$ متراص .

لنفرض تحقق القضية من أجل $n = k$ ولنثبت على صحتها من أجل $n = k+1$ لدينا $A^{k+1} = A^k A$

وبالتالي حسب الخطوة الأولى نجد أن $A^{k+1}$ متراص وبالتالي $A^n$ متراص

**مبرهنة :** إذا كان $A_1 : X \to Y$ و $A_2 : X \to Y$ مؤثرين متراصين فإن $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ متراص وذلك أيا كان العددان $\alpha_1, \alpha_2$ .

التركيب الخطي

**الإثبات :** لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة في $X$ وبما أن $A_1$ متراص فتوجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تكون $\{A_1 x_{n_k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة في $Y$ ، كذلك بما أن $A_2$ متراص توجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تكون $\{A_2 x_{n_k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة في $Y$ وبالتالي توجد المتتالية $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{x_{n_k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty} \cap \{x_{n_k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تكون $\{(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة وذلك لأن :

$$\lim_{k \to \infty} (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)x_{n_k} = \alpha_1 \lim_{k \to \infty} A_1(x_{n_k}) + \alpha_2 \lim_{k \to \infty} A_2(x_{n_k}) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = y$$

إذن $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ متراص وهو المطلوب .

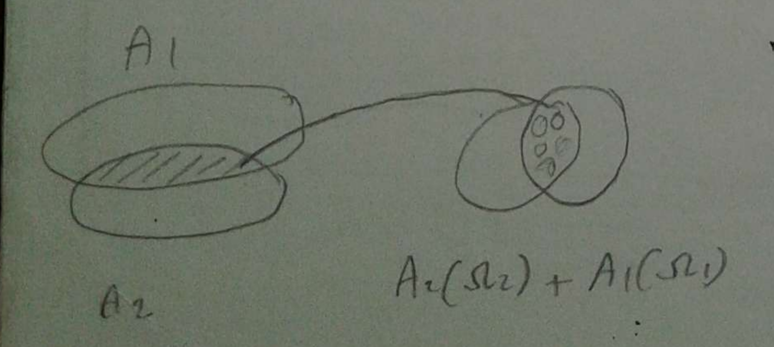
**نتيجة :** إذا كان $X$ فضاء خطي منظم و $B$ فضاء باناخ فإن مجموعة كل المؤثرات المتراصة $A: X \to B$ تشكل فضاء خطي جزئي مغلق ضمن $L(X, B)$ .

(بلا اثبات) تمليا علينا اثبات مبرهنتها

**نتيجة :** يكون المؤثر الخطي والمحدود $A: X \to B$ متراصاً إذا كانت صورة كرة الواحدة شبه متراصة في المستقر .







$e_1, e_2, \dots, e_n$ قاعدة لـ $X$ أي أنه أيا كان $x \in X$ فإن $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ وبالتالي وبالاستفادة من خطية $A$

$$\|Ax\| = \left\| A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} A(x_i e_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i A(e_i) \right\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|A(e_i)\| \le \max\|A(e_i)\| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = c\|x\| \quad ; c = \max\|A(e_i)\|$$

وبالتالي $A$ محدود ، وهو المطلوب .

**<u>نتيجة :</u>** ليكن $A : X \to Y$ مؤثر خطي و $\dim X = n < \infty$ عندئذٍ يكون $A$ متراص .

**<u>مبرهنة :</u>** يكون المؤثر الخطي والمحدود $A : X \to Y$ متراصا إذا كان نهاية لمتتالية من المؤثرات الخطية المنتهية البعد حيث $Y$ فضاء تام .

**<u>الإثبات :</u>** بما أن متتالية المؤثرات خطية ومنتهية البعد فهي متراصة وبالتالي حسب تمرين سابق فإن نهايتها مؤثر متراص وهو المطلوب .

**<u>مبرهنة :</u>** يكون المؤثر الخطي والمحدود $A : X \to Y$ متراصا إذا وفقط إذا كان وجدت في كل متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة في المنطلق $X$ متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تكون $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة في $Y$ .

**<u>الإثبات : لزوم الشرط</u> :** لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة في $X$ وبما أن $A$ متراص فإن $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ شبه متراصة وبالتالي توجد فيها متتالية جزئية متقاربة $\{Ax_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ وهو المطلوب .

**<u>كفاية الشرط :</u>** لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة ولنثبت أنها شبه متراصة بما أنها محدودة فحسب الفرض توجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تكون $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة في $Y$ وهذا يعني أن $\{A(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ شبه متراصة وبالتالي $A$ متراص وهو المطلوب .

**<u>مبرهنة :</u>** إذا كان $A : X \to X$ مؤثر خطي متراص و $T : X \to X$ مؤثر خطي محدود فإن كل من المؤثرين $AT$ و $TA$ مؤثر متراص .

**<u>الإثبات :</u>** لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة في $X$ وبما أن $A$ متراص فإنه يوجد في صورتها $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ وبالتالي $\lim_{k \to \infty} Ax_{n_k} = y_0$ وبما أن $T$ محدود فهو مستمر وبالتالي $\lim_{k \to \infty} TAx_{n_k} = Ty_0$ وبالتالي وجدت في المتتالية $\{TAx_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة هي $\{TAx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

٢٠١٣/٣/٢٥ **المحاضرة (٥)**

**تعريف ( المؤثر المنتهي البعد ) :** ليكن $A:X\to Y$ مؤثر خطي نقول أن $A$ منتهي البعد إذا كان $R(A)$ منتهي البعد ، حيث $X,Y$ فضاءان خطيان منظمان .

**مبرهنة :** كل مؤثر خطي محدود ومنتهي البعد هو مؤثر متراص ( احتمال ③ ) .

**الإثبات :** بفرض $A:X\to Y$ مؤثر خطي ومنتهي البعد ولتكن $M$ مجموعة محدودة في $X$ وبالتالي $A(M)$ مجموعة محدودة في الفضاء المنتهي البعد $R(A)$ فهي ( حسب مبرهنة سابقة ) شبه متراصة ولما كانت $M$ كيفية فإن $A$ مؤثر متراص .

**تمهيدية :** ليكن $A:X\to Y$ مؤثر خطي و $\dim X=n<\infty$ عندئذ يكون منتهي البعد ومحدود ويكون $\dim R(A)\le n$ .

**شرح قبل الإثبات :** إذا كان $\dim F=n$ فإن عدد عناصر أي قاعدة في هذا الفضاء يساوي $n$ وإن أي جملة مكونة من $n+1$ عنصر في $F$ تكون مرتبطة خطياً ، فإذا أردنا أن نثبت أن $\dim F\le n$ فيكفي أن نبرهن أن أي جملة من العناصر مكونة من $n+1$ هي مرتبطة خطياً .

**الإثبات :** بما أن $\dim X=n$ فإن عدد عناصر القاعدة في $X$ يساوي $n$ وإن أي جملة مكونة من $n+1$ عنصر مرتبطة خطياً ، لنأخذ $R(A)\subset Y$ ولنثبت أن $\dim R(A)\le n$ ، لهذا الغرض يجب أن نبرهن أن أي جملة من العناصر مكونة من $n+1$ في $R(A)$ هي مرتبطة خطياً ، لتكن الجملة $y_1,y_2,...,y_n,y_{n+1}\in R(A)$ عندئذ توجد العناصر $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}\in X$ بحيث $y_i=Ax_i \quad , \quad i=1,2,...,n+1$ وبما أن $\dim X=n$ فإن الجملة $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}$ مرتبطة خطياً أي أنه توجد الأعداد التي ليست جميعها أصفار وهي $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ بحيث تتحقق المطابقة التالية $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n+\alpha_{n+1}x_{n+1}=0$ وبما أن $A$ خطي فإن :

$$A(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n+\alpha_{n+1}x_{n+1})=\alpha_1A(x_1)+\alpha_2A(x_2)+...+\alpha_nA(x_n)+\alpha_{n+1}A(x_{n+1})=$$
$$=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ny_n+\alpha_{n+1}y_{n+1}=A(0)=0$$

أي أن الجملة الاختيارية $y_1,y_2,...,y_n,y_{n+1}\in R(A)$ هي مرتبطة خطياً وهذا يعني أن $\dim R(A)\le n<\infty$ وهذا بدوره يكافئ أن المؤثر $A$ منتهي البعد ، ولإثبات أنه محدود بفرض أن

$$\|(A-A_n)x\|_{\ell_2} = \|Ax - A_nx\|_{\ell_2} = \left\|\left(\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\dots,\frac{\xi_n}{n},\frac{\xi_{n+1}}{n+1},\frac{\xi_{n+2}}{n+2},\dots\right)-\left(\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\dots,\frac{\xi_n}{n},0,0,\dots\right)\right\|_{\ell_2} =$$

$$= \left\|\left(0,0,\dots,0,\frac{\xi_{n+1}}{n+1},\frac{\xi_{n+2}}{n+2},\dots\right)\right\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|\frac{\xi_i}{i}\right|^2} \le \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^2} \le \frac{1}{n+1}\sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^2} \le \frac{1}{n+1}\|x\|_{\ell_2}$$

إذن :

$$\|(A-A_n)x\|_{\ell_2} \le \frac{1}{n+1}\|x\|_{\ell_2}$$

وبالتالي :

$$\|A-A_n\|_{\ell_2} = \sup_{\substack{x\neq\theta \\ x\in\ell_2}} \frac{\|(A-A_n)x\|_{\ell_2}}{\|x\|_{\ell_2}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وبالتالي متتالية المؤثرات متقاربة بانتظام من المؤثر $A$ فالمؤثر $A$ متراص .

**لاحظ :** لو عدنا إلى المثال السابق لوجدنا أن : $\|(I-A_n)x\|_{\ell_2} \le \|x\|_{\ell_2}$ وبالتالي :

$$\|I-A_n\|_{\ell_2} = \sup_{\substack{x\neq\theta \\ x\in\ell_2}} \frac{\|(I-A)x\|_{\ell_2}}{\|x\|_{\ell_2}} = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ولذلك قلنا إن التقارب نقطي وليس بانتظام .

مجموعة $A_n(M)$ محدودة في فضاء منتهي البعد ( $\ell_2^{(n)}$ الإيزومورفي مع $C^n$ ) وحسب مبرهنة تكون هذه المجموعة $A_n(M)$ شبه متراصة إذن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متراصة .

نهاية هذه المتتالية $Ix$ $\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,0,0,\ldots) = (\xi_1,\xi_2,\ldots) = x = Ix$ وحسب مبرهنة سابقة فإن المؤثر $I$ غير متراص في الفضاء غير المنتهي البعد ( لاحظ أن تقارب المتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر $I$ هو تقارب نقطي وليس بانتظام لذلك المبرهنة السابقة لم تنطبق ) .

**تذكير :** التقارب النقطي هو على الشكل التالي $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$ أو $\lim_{n\to\infty}\|(A_n - A)x\| = 0$ أو $\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \|(A_n - A)x\| < \varepsilon$ أما التقارب بانتظام $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ أو $\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$ أو $\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \|A_n - A\| < \varepsilon$ ) .

**تمرين :** لتكن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث :

$A_n : \ell_2 \to \ell_2 : A_n(\xi_1,\xi_2,\ldots) = (\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\ldots,\frac{\xi_n}{n},0,0,\ldots)$ أثبت أن هذه المتتالية متراصة ، واستنتج أن نهايتها $\lim_{n\to\infty} A_n$ مؤثر متراص .

**الحل :** $\|A_n x\|_{\ell_2} = \left\|(\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\ldots,\frac{\xi_n}{n},0,0,\ldots)\right\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\xi_i}{i}\right|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2} = \|x\|_{\ell_2}$

وبالتالي $B$ فالمؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ، وبما أن المؤثر $A_n \quad , \quad n=1,2,\ldots$ ينقل كل مجموعة محدودة $M$ في $\ell_2$ المنطلق إلى مجموعة $A_n(M)$ محدودة في فضاء منتهي البعد ( $\ell_2^{(n)}$ الإيزومورفي مع $C^n$ ) وحسب مبرهنة تكون هذه المجموعة $A_n(M)$ شبه متراصة إذن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متراصة . بفرض :

$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} (\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\ldots,\frac{\xi_n}{n},0,0,\ldots) = (\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\ldots,\frac{\xi_n}{n},\frac{\xi_{n+1}}{n+1},\frac{\xi_{n+2}}{n+2},\ldots)$ لدينا :



$\|x\| = (\sum |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$

ومحدود $\|Ix\|=\|x\|$ ) ولكنه ليس متراصاً لأن $I(M)=M$ وبالتالي فالمجموعة $M$ محدودة وصورتها وفق $I$ ليست شبه متراصة فهو غير متراص .

**ملاحظة :** المؤثر المطابق في أي فضاء غير منتهي الأبعاد ( مثل $\ell_p,\ell_\infty,L_p[a,b],L_\infty[a,b],c[a,b]$ ) هو مؤثر غير متراص لأنه $I(S(0,1))=S(0,1)$ وكرة الواحدة محدودة وصورتها ليست شبه متراصة لأنها لو كانت شبه متراصة لكان ( حسب مبرهنة ) الفضاء منتهي الأبعاد وهذا تناقض .

**مبرهنة :** إذا كان $X$ فضاءً خطياً منظماً و $B$ فضاء باناخ ، وكانت $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من المؤثرات الخطية المتراصة حيث $A_n:X\to B$ وبفرض أن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من مؤثر $A$ عندئذٍ $A$ متراص .

**الإثبات :** لتكن $M\subset X$ مجموعة محدودة أي أن $\forall x\in M \quad , \quad c>0 \quad , \quad \|x\|\le c$ ومن أجل $\varepsilon>0$ وحسب الفرض يوجد $n_0=n_0(\varepsilon)>0$ بحيث يكون $n>n_0(\varepsilon) \quad , \quad \|A-A_n\|<\dfrac{\varepsilon}{c}$ ولنثبت أن $N=A_{n_0}(M)$ تشكل شبكة $-\varepsilon$ للمجموعة $K=A(M)$ ، لتكن $y_0=A_{n_0}(x)\in N$ يكون من أجل أي عنصر $y=A(x)\in K$ :

$$\|y-y_0\|=\|Ax-A_{n_0}x\|=\|(A-A_{n_0})x\|\le\|A-A_{n_0}\|\|x\|<\frac{\varepsilon}{c}c=\varepsilon$$

وهذا يعني أن $N=A_{n_0}(M)$ تشكل شبكة $-\varepsilon$ للمجموعة $K=A(M)$ وبما أن $A_{n_0}$ متراص فإن $N=A_{n_0}(M)$ شبه متراصة وبالتالي $N=A_{n_0}(M)$ تشكل شبكة $-\varepsilon$ شبه متراصة للمجموعة $K=A(M)$ إذن $A(M)$ شبه متراصة .

**تمرين :** لتكن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث ( $A_n:\ell_2\to\ell_2:A_n(\xi_1,\xi_2,\ldots)=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,0,0,\ldots)$ أثبت أن هذه المتتالية متراصة ، ولكن نهايتها $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ مؤثر غير متراص .

**الحل :** لدينا $c>0$ وبالتالي $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\ldots)\in\ell_2 \quad , \quad c=1 \quad , \quad \|A_nx\|_{\ell_2}\le c\|x\|_{\ell_2}$ فالمؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ، وبما أن المؤثر $x\neq0\in X$ ينقل كل مجموعة محدودة $M$ في $\ell_2$ المنطلق إلى

**المحاضرة (٤)** (اعادة للمحاضرة ٣) اضافة للآتي: ٢٠١٣/٣/٢٤

**تعريف** ( المؤثر المتراص ) : إذا كان $X,Y$ فضائين خطيين منظمين و $A:X\to Y$ مؤثر خطي عندئذٍ نسمي $A$ متراصا إذا صوّر أي مجموعة محدودة $M$ من $X$ بمجموعة $A(M)$ شبه متراصة في $Y$ .

**مبرهنة :** كل مؤثر خطي متراص يكون محدودا .

**الإثبات :** ليكن $A:X\to Y$ مؤثرا خطيا متراصا فإنه ينقل كل مجموعة محدودة $M$ من $X$ بمجموعة $A(M)$ شبه متراصة في $Y$ ، لنأخذ في المنطلق $X$ كرة الواحدة $S(0,1)=\{x\in X;\|x\|=1\}$ فإن هذه المجموعة هي مجموعة محدودة لأن نظيم كل عنصر من عناصرها يساوي الواحد $\|x\|=1<2=c>0;\forall x\in S$ وبما أن $A$ متراص فإن $A(S(0,1))$ شبه متراصة في $Y$ فهي محدودة (حسب مبرهنة كل مجموعة شبه متراصة في فضاء خطي منظم تكون محدودة ) وبالتالي يوجد $c>0$ بحيث $\|y\|_Y\le c$ أيا كانت $y\in A(S)$ ، ليكن $x\neq 0\in X$ فإن :

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|_X=1 \Rightarrow \frac{x}{\|x\|_X}\in S(0,1) \Rightarrow A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\in A(S) \Rightarrow \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y\le c \Rightarrow \left\|\frac{Ax}{\|x\|_X}\right\|_Y\le c \Rightarrow \|Ax\|_Y\le c\|x\|_X$$

إذن فالعلاقة $\|Ax\|_Y\le c\|x\|_X$ محققة أيا كان $x\neq 0\in X$ وحتى من أجل $x=0$ فإن $Ax=0$ فالمتراجحة محققة إذن $\forall x\in X \quad , \quad \|Ax\|_Y\le c\|x\|_X$ وبالتالي $A$ محدود ، وهو المطلوب .

**ملاحظة هامة :** إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة ، أي أنه توجد مؤثرات خطية محدودة غير متراصة ، ويبين ذلك المثال التالي .

**تمرين :** أعط مثالا على مؤثر خطي محدود ولكنه غير متراص .

**الحل :** في الفضاء $X=\ell_2$ نأخذ المجموعة $M=\{e_1,e_2,\dots\}$ حيث $e_1=(1,0,0,\dots)$ و $e_2=(0,1,0,\dots)$ وهكذا ، وجدنا حسب تمرين سابق أنها ليست شبه متراصة وهذه المجموعة محدودة لأن $k=1,2,\dots \quad , \quad \|e_k\|=1$ ولو أخذنا المؤثر المطابق $I:\ell_2\to\ell_2 : Ix=x$ فإن هذا المؤثر هو مؤثر خطي وهو محدود ( خطي لأن $I(ax+by)=ax+by=aIx+bIy$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; ; \; \|f_h - f\| < \varepsilon \;\; , \;\; \forall f \in M \;\; , \;\; 0 < h < \delta$$

حيث $\delta$ توافق جميع توابع المجموعة $M$ .

**تعريف : ( التوابع المستمرة بنفس الدرجة في $L_p[a,b]$ حيث $1 \le p < \infty$ )** : لتكن $M \subset L_p[a,b]$ حيث $1 \le p < \infty$ مجموعة جزئية من $L_p[a,b]$ نقول إن أسرة التوابع $M$ مستمرة بنفس الدرجة ( متكافئة الاستمرار ) في $L_p[a,b]$ حيث $1 \le p < \infty$ .

إذا كان من إجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث يتحقق الاقتضاء :

$$0 < \rho < \delta \Rightarrow \|f(x+\rho) - f(x)\|_{L_p[a,b]} = \left( \int_a^b |f(x+\rho) - f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \;\; , \;\; \forall f \in M$$

وحيث أن $\delta$ توافق جميع توابع المجموعة $M$ .

**مبرهنة (بدون برهان)** : إذا كانت $M \subset L_p[a,b]$ حيث $1 \le p < \infty$ مجموعة جزئية من $L_p[a,b]$ عندئذٍ تكون $M$ شبه متراصة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

1. $M$ محدودة بانتظام ، أي أنه يوجد عدد $c > 0$ بحيث $\|f\|_{L_p[a,b]} < c$ أيا كان $f \in M$ .
2. أن تكون توابع المجموعة $M$ مستمرة بنفس الدرجة .

**ملاحظة :** في حال كان $p = 2$ ( نحصل على $L_2[a,b]$ وهو فضاء هيلبرت ) عندئذٍ نعلم أن :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \;\; ; \;\; f, g \in L_2[a,b]$$

وكل تابع $f \in L_2[a,b]$ يكتب على الشكل :

$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ حيث $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ قاعدة كثيفة متعامدة نظامية تامة في $L_2[a,b]$ .

1. $M$ محدودة بانتظام ، أي أنه يوجد عدد $c > 0$ بحيث $\|x\|_{L_p} < c$ أيا كان $x \in M$ .

2. أن يتحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) > 0 \;\;,\;\; \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| < \varepsilon \;\;,\;\; \forall x \in M \;\;,\;\; n > n_0$$

**التراص في $L_p[a,b]$ حيث $1 \le p < \infty$** : **تعريف (تابع ستيكلوف ) :** ليكن $f \in L_p[a,b]$ حيث $1 \le p < \infty$ و ليكن $h > 0$ عندئذ ندعو التابع $t \in [a,b]$ , $f_h(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$

بتابع ستيكلوف الموافق لـ $f(x)$ .

**تمهيدية ( خواص تابع ستيكلوف ) :** إذا كان $f \in L_p[a,b]$ حيث $1 \le p < \infty$ و $f_h$ تابع ستيكلوف الموافق له عندئذ :

1. $f_h$ تابع مستمر على $[a,b]$ .

2. $f_h \in L_p[a,b]$ و $\|f_h\|_{L_p[a,b]} \le \|f\|_{L_p[a,b]} = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ .

3. $\lim_{h \to 0} \|f_h - f\|_{L_p[a,b]} = 0$ ، وهذا يعني أنه من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ فإذا كان $0 < h < \delta$ فإن : $\|f_h - f\|_{L_p[a,b]} < \varepsilon$ .

**مبرهنة ( كلماغوروف ) (بدون برهان):** إذا كانت $M \subset L_p[a,b]$ حيث $1 \le p < \infty$ مجموعة جزئية من $L_p[a,b]$ عندئذ تكون $M$ شبه متراصة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

1. $M$ محدودة بانتظام ، أي أنه يوجد عدد $c > 0$ بحيث $\|f\|_{L_p[a,b]} < c$ أيا كان $f \in M$ .

2. أن يتحقق الشرط :

## المحاضرة (٣)

**التراص في $C[a,b]$** : **تعريف :** ( التوابع المستمرة بنفس الدرجة في $C[a,b]$ ) : لتكن أسرة التوابع $C[a,b]\supset M=\{f_\alpha(x);\alpha\in A\}$ نقول إن أسرة التوابع $M$ مستمرة بنفس الدرجة ( متكافئة الاستمرار ) إذا كان من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد عدد $\delta(\varepsilon)>0$ بحيث يتحقق الاقتضاء :

$|x_1-x_2|<\delta \;\Rightarrow\; |f_\alpha(x_1)-f_\alpha(x_2)|<\varepsilon$ و $\varepsilon$ توافق جميع التوابع $f_\alpha$ .

**مبرهنة ( أرزيلا – إسكولي ) :** إذا كانت $C[a,b]\supset M$ مجموعة جزئية من $C[a,b]$ عندئذ تكون $M$ شبه متراصة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

1. $M$ محدودة بانتظام، أي أنه يوجد عدد $c>0$ بحيث $\|f\|_{C[a,b]}<c$ أيا كان $f\in M$ .

2. أن تكون توابع المجموعة $M$ مستمرة بنفس الدرجة .

**التراص في $\ell_p$ حيث $1\le p<\infty$ : مبرهنة** : إذا كانت $\ell_p\supset M$ حيث $1\le p<\infty$ مجموعة جزئية من $\ell_p$ عندئذ تكون $M$ شبه متراصة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

1. $M$ محدودة بانتظام، أي أنه يوجد عدد $c>0$ بحيث $\|x\|_{\ell_p}<c$ أيا كان $x\in M$ .

2. أن يتحقق الشرط :

$$\forall\varepsilon>0 \;\Rightarrow\; \exists n_0=n_0(\varepsilon)>0 \;,\; \left\|x-\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\right\|<\varepsilon \;,\; \forall x\in M \;,\; n>n_0$$

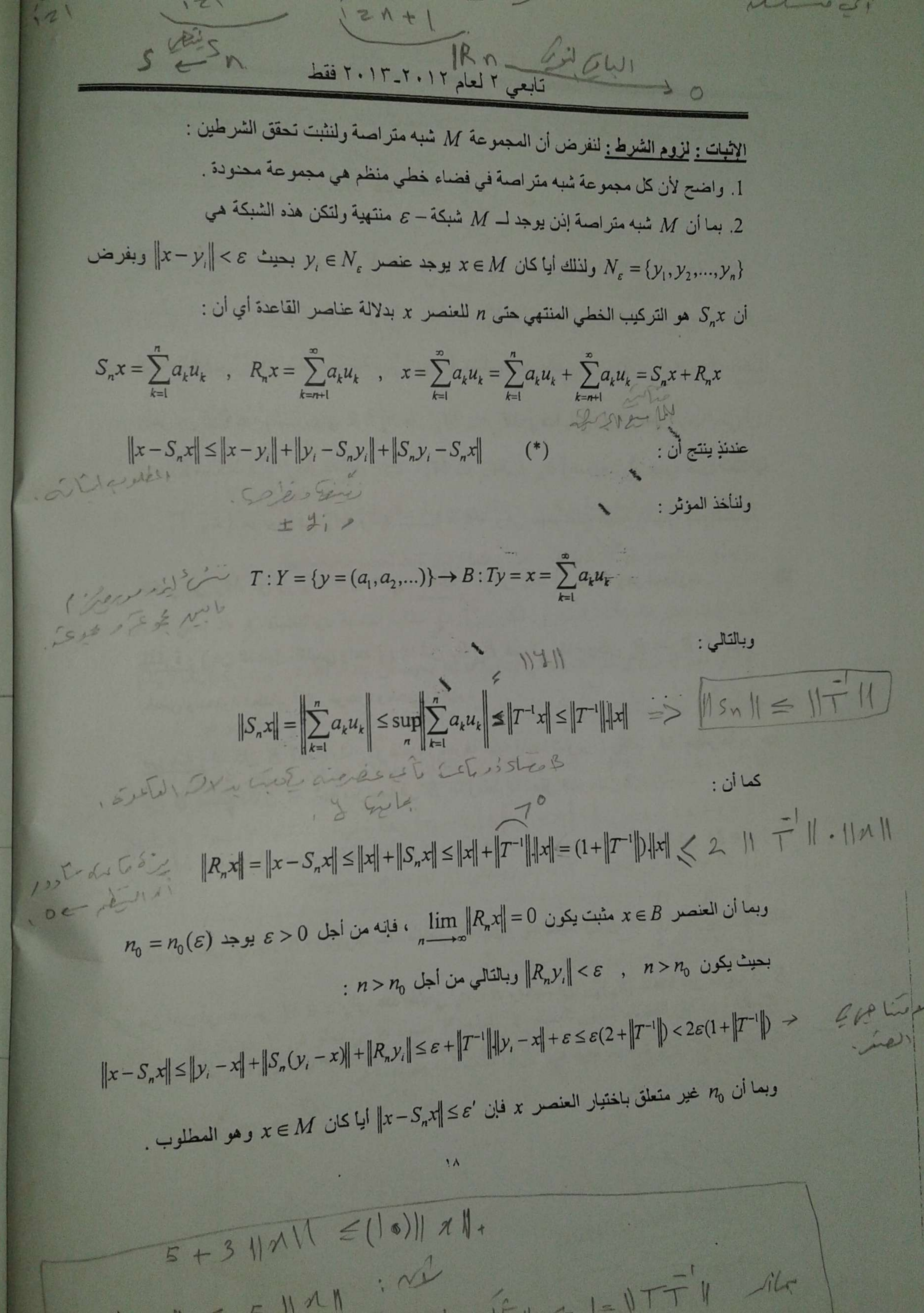
**ملاحظة :** في حال كان $p=2$ ( نحصل على $\ell_2$ وهو فضاء هيلبرت ) عندئذ نعلم أن :

$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta_i} \;;\; x=(\xi_i)\in\ell_2 \;,\; y=(\eta_i)\in\ell_2$ عندئذ : إذا كانت $\ell_2\supset M$ مجموعة جزئية من $\ell_2$ عندئذ تكون $M$ شبه متراصة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

**كفاية الشرط :** لنفرض أن الشرطين محققين ولنثبت أن $M$ شبه متراصة فمن أجل عدد $\varepsilon > 0$ مفروض نختار عدد $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون $\|R_{n_0}x\| < \varepsilon \quad , \quad \forall x \in M$ ولنأخذ المجموعة $M_{n_0} = \{z; z = R_{n_0}x; x \in M\}$ وهذه المجموعة يمكن اعتبارها مجموعة جزئية من الفضاء المنتهي الأبعاد والجزئي من $B$ وهو $E^{n_0}$ المولد بالعناصر $u_1, u_2, \ldots, u_{n_0}$ وبما أن $\|S_{n_0}x\| < \|T^{-1}\|\|x\| < c\|T^{-1}\| = c' \quad , \quad \forall z = S_{n_0}x \in M_{n_0}$ ومن كون المجموعة $M$ محدودة فإن $M_{n_0}$ محدودة وبالتالي فهي شبه متراصة في $E^{n_0}$ وبالتالي يوجد شبكة $-\varepsilon$ منتهية لـ $M_{n_0}$ وهذه الشبكة تشكل شبكة $-2\varepsilon$ للمجموعة $M$ وبالتالي $M$ شبه متراصة.

( من كون $\|x - y\| \le \|x - S_{n_0}x\| + \|S_{n_0}x - y\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ ) .

**ملاحظة :** في فضاء هيلبرت الفصول $H$ إذا كانت $M \subset H$ عندئذٍ تكون $M$ شبه متراصة إذا وفقط إذا كانت محدودة بانتظام وتحقق الشرط $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} < x, u_k > u_k \right\| < \varepsilon$ وذلك أيا كان $x \in M$ .





**الإثبات : لزوم الشرط :** لنفرض أن المجموعة $M$ شبه متراصة ولنثبت تحقق الشرطين :

1. واضح لأن كل مجموعة شبه متراصة في فضاء خطي منظم هي مجموعة محدودة .

2. بما أن $M$ شبه متراصة إذن يوجد لـ $M$ شبكة $-\varepsilon$ منتهية ولتكن هذه الشبكة هي $N_\varepsilon = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ولذلك أيا كان $x \in M$ يوجد عنصر $y_i \in N_\varepsilon$ بحيث $\|x - y_i\| < \varepsilon$ وبفرض أن $S_n x$ هو التركيب الخطي المنتهي حتى $n$ للعنصر $x$ بدلالة عناصر القاعدة أي أن :

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \quad , \quad R_n x = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k u_k \quad , \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k u_k = S_n x + R_n x$$

عندئذ ينتج أن :

$$\|x - S_n x\| \le \|x - y_i\| + \|y_i - S_n y_i\| + \|S_n y_i - S_n x\| \qquad (*)$$

ولنأخذ المؤثر :

$$T : Y = \{y = (a_1, a_2, \ldots)\} \to B : Ty = x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$$

وبالتالي :

$$\|S_n x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\right\| \le \sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\right\| \le \|T^{-1} x\| \le \|T^{-1}\| \|x\|$$

كما أن :

$$\|R_n x\| = \|x - S_n x\| \le \|x\| + \|S_n x\| \le \|x\| + \|T^{-1}\| \|x\| = (1 + \|T^{-1}\|) \|x\|$$

وبما أن العنصر $x \in B$ مثبت يكون $\lim_{n \to \infty} \|R_n x\| = 0$ ، فإنه من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون $n > n_0$ ، $\|R_n y_i\| < \varepsilon$ وبالتالي من أجل $n > n_0$ :

$$\|x - S_n x\| \le \|y_i - x\| + \|S_n (y_i - x)\| + \|R_n y_i\| \le \varepsilon + \|T^{-1}\| \|y_i - x\| + \varepsilon \le \varepsilon (2 + \|T^{-1}\|) < 2\varepsilon (1 + \|T^{-1}\|)$$

وبما أن $n_0$ غير متعلق باختيار العنصر $x$ فإن $\|x - S_n x\| \le \varepsilon'$ أيا كان $x \in M$ وهو المطلوب .

**مبرهنة :** لتكن $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من المجموعات المتراصة في فضاء خطي منظم بحيث $M_n \neq \phi$ و

بحيث $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$ عندئذ $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \phi$ .

**الإثبات :** لنختر من كل مجموعة $M_n$ عنصر $x_n \in M_n$ فنحصل على المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ وبما أن

$n = 1,2,\dots \;,\; x_n \in M_n \subseteq M_1$ فإن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_1$ وبما أن $M_1$ متراصة فرضاً فانه يوجد

في المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة من عنصر $x_0$ ، أي $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$

ولكن من أجل عدد مثبت $k$ و $n_k > k$ فإن $M_{n_k} \subset M_k$ ( هذا ينتج من الفرض ) وهذا يعني أن

$x_{n_k} \in M_{n_k} \subset M_k \;\Rightarrow\; x_{n_k} \in M_k \;;\; \forall k = 1,2,\dots$ وهذا يعني أن جميع حدود المتتالية

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ موجودة في $M_k$ وذلك $\forall k = 1,2,\dots$ وهي مجموعات مغلقة ، فنهاية هذه المتتالية

تنتمي إلى $M_k$ أي أن $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \in M_k$ أي أن $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$ وهو المطلوب . ■

**تذكرة :** ( من التحليل التابعي واحد ) : إذا كان $B_1, B_2$ فضائي باناخ وكان $A : B_1 \to B_2$ مؤثر خطي ومحدود فعندئذ $A^{-1}$ موجود وخطي ومحدود .

**مبرهنة :** إذا كان $B$ فضاء باناخ ذو قاعدة ( معرفة عليه قاعدة شاودر ) وكانت $M$ مجموعة جزئية من $B$ فعندئذ تكون $M$ شبه متراصة في $B$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

1. $M$ محدودة ( محدودة بانتظام ) ، أي أنه يوجد عدد $c > 0$ بحيث $\|x\| < c$ أيا كان $x \in M$ .

2. من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \right\| < \varepsilon$ وذلك من أجل أي عنصر $x \in M$ وأي عدد طبيعي $n \geq n_0$ وبحيث أن $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ قاعدة غير منتهية لـ $B$ و بحيث أن $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ هي مركبات $x$ وفق القاعدة $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

أنه من أجل أي عنصر $x \in X$ يوجد $y_n \in N_{\varepsilon_n}$ بحيث $\|x - y_n\| < \varepsilon_n$ ، لنضع $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\varepsilon_n}$

فنجد أن هذه المجموعة كثيفة وقابلة للعد إذن الفضاء $X$ فصول .

**توضيح لماذا المجموعة كثيفة :** حتى تكون المجموعة $N$ كثيفة يجب أن تكون لصاقتها تساوي الفضاء $X$ كله أي أن تكون كل نقطة $x \in X$ نقطة لاصقة بالمجموعة ، لإثبات ذلك يجب أن نثبت أن أي كرة مفتوحة مركزها $x$ تتقاطع مع $N$ وهذا واضح ؛ لتكن $K(x, \varepsilon_n)$ كرة مفتوحة فحسب ما سبق يوجد $y_n \in N_{\varepsilon_n}$ بحيث $\|x - y_n\| < \varepsilon_n$ وهذا يعني أن $y_n \in K(x, \varepsilon_n)$ وبالتالي $y_n \in N_{\varepsilon_n} \bigcap K(x, \varepsilon_n)$ وبالتالي $y_n \in N \bigcap K(x, \varepsilon_n)$ وبالتالي $N \bigcap K(x, \varepsilon_n) \neq \phi$

وبالتالي فإن كل كرة مفتوحة مركزها $x$ تتقاطع مع $N$ وهو المطلوب .

وواضح أن المجموعة $N$ قابلة للعد لأنها اجتماع قابل للعد لمجموعات منتهية .

**تتمة إثبات المبرهنة ( الفضاء تام ) :** لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أساسية من الفضاء $X$ هذا يعني أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث أن $n, m > n_0$ ، $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$

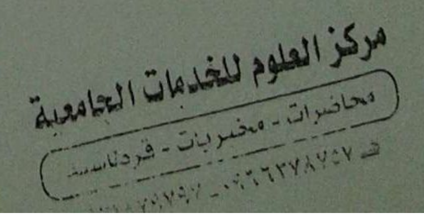
وبما أن $X$ متراصة فإنه توجد في المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة من عنصر من $X$ ولتكن $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \in X$ وبالتالي من أجل أي عدد $k$ يكون :

$\|x_k - x_0\| \leq \|x_{n_k} - x_k\| + \|x_{n_k} - x_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ وهذا يعني أن المتتالية الأساسية الاختيارية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العنصر $x_0 \in X$ وبالتالي $X$ تام ، وهو المطلوب .

**ملاحظة :** إذا كانت $M$ مجموعة متراصة في فضاء خطي منظم $X$ و $M' \subset M$ فإن $M'$ شبه متراصة .

**ملاحظة :** إذا كان الفضاء الخطي المنظم $X$ تاماً و $Y$ فضاء جزئي مغلق في $X$ فعندئذٍ تكون المجموعة $M \subset Y$ شبه متراصة في $X$ إذا كانت شبه متراصة في $Y$ .





**<u>الاثبات</u> (لإطلاع فقط)** : ليكن $\varepsilon > 0$ ولنأخذ $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ وبما أن $M$ محدودة كليا فتوجد لها شبكة $\varepsilon_1 -$ منتهية ( $M_1 \subset X$ ) ولتكن $M_1 = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ أي أنه توجد عدد من الكرات المفتوحة التي أنصاف أقطارها $\varepsilon_1$ ومراكزها عناصر من $M_1$ تغطي $M$ وهي $K(y_1,\varepsilon_1), K(y_2,\varepsilon_1), ..., K(y_n,\varepsilon_1)$ ، أي أن $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(y_i,\varepsilon_1)$ ولنأخذ $z_i \in M \bigcap K(y_i,\varepsilon_1) \quad , \quad i = 1,2,...,n$ فتكون $z_i \in M$ وأيضا $z_i \in K(y_i,\varepsilon_1) \quad , \quad i = 1,2,...,n$ وهذا يعني أن $\|y_i - z_i\| \le \varepsilon_1 \quad , \quad i = 1,2,...,n$

و من أجل أي نقطة $x \in M$ يكون $x \in \bigcup_{i=1}^{n} K(y_i,\varepsilon_1)$ وبالتالي توجد كرة $K(y_i,\varepsilon_1)$ بحيث $x \in K(y_i,\varepsilon_1)$ ، وبالتالي مما سبق نجد أنه من أجل أي نقطة $x \in M$ توجد نقطة $z_i \in M$ بحيث يكون : $\|x - z_i\| \le \|x - y_i\| + \|y_i - z_i\| \le \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 = \varepsilon$

إذن فالمجموعة $N_\varepsilon = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ تشكل شبكة $\varepsilon -$ منتهية محتواة في $M$ ( $N_\varepsilon \subset M$ ) .

**<u>مبرهنة ( دون برهان ) :</u>** الشرط اللازم لتكون المجموعة $M$ شبه متراصة في الفضاء الخطي المنظم $X$ هو أن تكون محدودة تماماً ( كليا ) ، ويكون الشرط كافياً إذا كان الفضاء تاماً .

**<u>أو بكلام آخر :</u>** إذا كان $X$ فضاء باناخ ، و $M$ مجموعة محتواة في $X$ عندئذٍ تكون $M$ شبه متراصة إذا وفقط إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ توجد لـ $M$ شبكة $\varepsilon -$ منتهية محتواة في $M$ ( أو يكون لها شبكة $\varepsilon -$ شبه متراصة ) .

**<u>مبرهنة :</u>** إذا كان الفضاء الخطي المنظم $X$ متراصاً فإنه يكون تاماً وفصولاً .

**<u>الاثبات :</u>** ليكن $X$ فضاء خطي منظم ومتراص أي أن $X$ شبه متراصة وبالتالي من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد لـ $X$ شبكة $\varepsilon -$ منتهية ، لنأخذ المتتالية $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $\varepsilon_n > 0$ و $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ ، عندئذٍ يوجد لـ $X$ شبكة $\varepsilon_n -$ منتهية وهي $N_{\varepsilon_n}$ وذلك أيا كان $n = 1,2,...$ أي

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_j^{N_k} = \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} \alpha_j^{N_k} + \lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} \alpha_j^{N_k} = \operatorname{Re} \alpha_j^0 + \operatorname{Im} \alpha_j^0 = \alpha_j^0$$

وبالتالي توجد في المتتالية الاختيارية $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ التي أخذناها متتالية جزئية هي $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث $u^{N_k} = \alpha_1^{N_k} u_1 + \alpha_2^{N_k} u_2 + \ldots + \alpha_n^{N_k} u_n$ من أجل $k = 1,2,\ldots$ وهي متقاربة من العنصر :

$$\lim_{k\to\infty} u^{N_k} = \lim_{k\to\infty} (\alpha_1^{N_k} u_1 + \alpha_2^{N_k} u_2 + \ldots + \alpha_n^{N_k} u_n) =$$

$$= (\lim_{k\to\infty} \alpha_1^{N_k}) u_1 + (\lim_{k\to\infty} \alpha_2^{N_k}) u_2 + \ldots + (\lim_{k\to\infty} \alpha_n^{N_k}) u_n = \alpha_1^0 u_1 + \alpha_2^0 u_2 + \ldots + \alpha_n^0 u_n = u^0$$

أي أن :

$$\lim_{k\to\infty} u^{N_k} = u^0$$

فالمتتالية $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة ، وبالتالي $M$ شبه متراصة وهو المطلوب .

**تعريف ( شبكة – $\varepsilon$ ) :** يفرض $M, N$ مجموعتان جزئيتان من الفضاء الخطي المنظم $X$ ، وليكن $\varepsilon > 0$ ، نقول إن $N$ تشكل شبكة – $\varepsilon$ لـ $M$ إذا وجد من أجل كل عنصر $x \in M$ عنصر $y \in N$ بحيث يكون $\|x - y\| < \varepsilon$ ، ونرمز لهذه الشبكة بالرمز $N_\varepsilon$ .

**أو بمفهوم طبولوجي :** نقول إن $N$ تشكل شبكة – $\varepsilon$ لـ $M$ إذا تحقق الشرط $M \subset \bigcup_{y \in N} K(y, \varepsilon)$

حيث أن $K(y, \varepsilon)$ هي مجموعة الكرات المفتوحة والتي مراكزها $y \in N$ ونصف قطر كل منها $\varepsilon$ .

**تعريف ( المجموعة المحدودة كلياً ) :** نقول عن المجموعة $M$ إنها محدودة كلياً ( تماماً ) إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد لـ $M$ شبكة – $\varepsilon$ منتهية ( $X \supset N_\varepsilon$ ) .

**أو بمفهوم طبولوجي :** نقول عن المجموعة $M$ إنها محدودة كلياً ( تماماً ) إذا وجدت مجموعة منتهية $N_\varepsilon = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ بحيث تكون $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(y_i, \varepsilon)$ ، أي مجموعة الكرات تشكل تغطية لـ $M$ .

**مبرهنة :** لتكن $X \supset M$ مجموعة جزئية من فضاء خطي منظم $X$ ، إذا كانت $M$ محدودة كلياً ( تماماً ) فتوجد لها شبكة – $\varepsilon$ منتهية ( $M \supset N_\varepsilon$ ) .

**غامر :** لأنه من أجل أي عنصر $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in C^n$ يوجد عنصر

$u=x_1u_1+x_2u_2+\dots+x_nu_n\in E^n$ بحيث $\varphi(u)=x$ .

مما سبق نجد أن التطبيق $\varphi$ إيزومورفيزم من $E^n$ في $C^n$ .

الآن ، لتكن $M\subset E^n$ مجموعة محدودة ولنثبت أنها شبه متراصة ، لتكن $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر

$M$ عندئذٍ يكون $u^N=\alpha_1^Nu_1+\alpha_2^Nu_2+\dots+\alpha_n^Nu_n$ من أجل $N=1,2,\dots$ حيث

$N=1,2,\dots$ , $j=1,2,\dots,n$ , $\alpha_j^N\in C$ وبما أن $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ عناصر من المجموعة المحدودة

$M$ فإن $N=1,2,\dots$ , $\|u^N\|_{E^n}<c$ , $\exists c>0$ ولكن $\|u^N\|_{E^n}=\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^N|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ وبالتالي

$\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^N|^2\right)^{\frac{1}{2}}<c$ وبالتالي $|\alpha_i^N|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^N|^2\right)^{\frac{1}{2}}<c$ أي أن $|\alpha_j^N|<c$ وذلك أيا كان

$N=1,2,\dots$ و $j=1,2,\dots,n$ ، ولكن $\alpha_j^N=\text{Re}\,\alpha_j^N+i.\text{Im}\,\alpha_j^N$ وبالتالي

$|\text{Re}\,\alpha_j^N|<|\alpha_j^N|<c,|\text{Im}\,\alpha_j^N|<|\alpha_j^N|<c$ أي لأن المتتاليتين العدديتين $\{\text{Re}\,\alpha_j^N\}_{N=1}^{\infty},\{\text{Im}\,\alpha_j^N\}_{N=1}^{\infty}$

محدودتان في $R$ وذلك أيا كان $j=1,2,\dots,n$ وحسب مبرهنة فإن كل منهما تملك متتالية جزئية متقاربة

ولتكن هاتان المتتاليتان الجزئيتان هما على الترتيب $\{\text{Re}\ \alpha_j^{N_k}\}_{k=1}^{\infty},\{\text{Im}\ \alpha_j^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ولتكن

$\text{Re}\ \alpha_j^0,\text{Im}\ \alpha_j^0$ نهايتا هاتين المتتاليتين على الترتيب أي أن :

$$\lim_{k\to\infty}\text{Re}\,\alpha_j^{N_k}=\text{Re}\,\alpha_j^0,\ \lim_{k\to\infty}\text{Im}\,\alpha_j^{N_k}=\text{Im}\,\alpha_j^0$$

وبالتالي :

**معرف تماما :** لأنه مهما يكن $u = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n , v = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n \in E^n$

بحيث $u = v$ فإن $x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n$ وبالمطابقة نجد أن

$i = 1,2,\ldots,n \quad , \quad x_i = y_i$ وبالتالي $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ أي أن $\varphi(u) = \varphi(v)$

وبالتالي تحقق الاقتضاء : $\varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow u = v$ فالتطبيق $\varphi$ معرف تماما .

**خطي :** لأنه مهما يكن $u = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n , v = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n \in E^n$ ومهما يكن $\lambda, \mu \in C$ فإن :

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi(\lambda x_1u_1 + \lambda x_2u_2 + \ldots + \lambda x_nu_n + \mu y_1u_1 + \mu y_2u_2 + \ldots + \mu y_nu_n) \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi\{(\lambda x_1 + \mu y_1)u_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2)u_2 + \ldots + (\lambda x_n + \mu y_n)u_n\} \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n) \Rightarrow$$

$$\lambda u + \mu v) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) + (\mu y_1, \mu y_2, \ldots, \mu y_n) = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mu(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$$

أي أن :

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$$

فالتطبيق خطي .

**يحافظ على النظيم :** لأن $\|\varphi(y)\|_{C^n} = \|x\|_{C^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{E^n}$

**متباين :** لأنه مهما يكن $u = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n , v = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n \in E^n$ بحيث $\varphi(u) = \varphi(v)$ فإن $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ وبالتالي $i = 1,2,\ldots,n \quad , \quad x_i = y_i$ ومنه $x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n$ وبالتالي $u = v$ وبالتالي تحقق الاقتضاء : $\varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow u = v$ فالتطبيق $\varphi$ متباين .

$\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}} < c$ وبالتالي $|\alpha_j^N| \le \left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}} < c$ أي أن $|\alpha_j^N| < c$ وذلك أيا كان

$N = 1,2,...$ و $j = 1,2,...,n$ أي أن المتتالية العددية $\{\alpha_j^N\}_{N=1}^{\infty}$ محدودة في $R$ وذلك أيا كان

$j = 1,2,...,n$ وحسب مبرهنة فإن هذه المتتالية تملك متتالية جزئية متقاربة ولتكن $\{\alpha_j^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$

ولتكن $\alpha_j^0$ نهاية هذه المتتالية أي أن $\lim_{k \to \infty} \alpha_j^{N_k} = \alpha_j^0$ وبالتالي توجد في المتتالية الاختيارية

$\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ التي أخذناها في البداية من المجموعة $M$ متتالية جزئية هي $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث

$u^{N_k} = \alpha_1^{N_k} u_1 + \alpha_2^{N_k} u_2 + ... + \alpha_n^{N_k} u_n$ من أجل $k = 1,2,...$ وهي متقاربة من العنصر :

$$\lim_{k \to \infty} u^{N_k} = \lim_{k \to \infty} (\alpha_1^{N_k} u_1 + \alpha_2^{N_k} u_2 + ... + \alpha_n^{N_k} u_n) =$$

$$= (\lim_{k \to \infty} \alpha_1^{N_k}) u_1 + (\lim_{k \to \infty} \alpha_2^{N_k}) u_2 + ... + (\lim_{k \to \infty} \alpha_n^{N_k}) u_n = \alpha_1^0 u_1 + \alpha_2^0 u_2 + ... + \alpha_n^0 u_n = u^0$$

أي أن :

$$\lim_{k \to \infty} u^{N_k} = u^0$$

فالمتتالية $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة ، وبالتالي $M$ شبه متراصة وهو المطلوب .

<u>الإثبات:</u> ( في حال كان $E$ عقدي ) : بما أن $E^n$ فضاء خطي ذو $n$ بعد فتوجد قاعدة

مكونة من $n$ عنصر وهي $u_1, u_2, ..., u_n$ وبالتالي $\forall u \in E^n$ فإنه توجد $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in C$ بحيث

$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$ ويكون $\|u\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ، وبالتالي من أجل أي عنصر

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in C^n$ يوجد $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n \in E^n$ ، لنأخذ التطبيق :

$$\varphi : E^n \to C^n : u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n \mapsto \varphi(u) = (x_1, x_2, ..., x_n) = x$$

فنجد أن هذا التطبيق :

$u_0 = a^0 + ib^0$

$|\alpha_1^N| \le |\alpha_1^N| + |\alpha_2^N| + ... + |\alpha_n^N|$

$= (\Sigma |\alpha_n^N|^2)^{\frac{1}{2}} < C$

$$\varphi(\lambda u+\mu v)=\varphi\{(\lambda x_1+\mu y_1)u_1+(\lambda x_2+\mu y_2)u_2+\ldots+(\lambda x_n+\mu y_n)u_n\} \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u+\mu v)=(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2,\ldots,\lambda x_n+\mu y_n) \Rightarrow$$

$$\lambda u+\mu v)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)+(\mu y_1,\mu y_2,\ldots,\mu y_n)=\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\mu(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v)$$

أي أن :

$\varphi(\lambda u+\mu v)=\lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v)$ فالتطبيق خطي .

**يحافظ على النظيم:** لأن $\|\varphi(u)\|_{R^n}=\|x\|_{R^n}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|u\|_{E^n}$ .

**متباين :** لأنه مهما يكن $u=x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n, v=y_1u_1+y_2u_2+\ldots+y_nu_n\in E^n$ بحيث

$\varphi(u)=\varphi(v)$ فإن $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ وبالتالي $i=1,2,\ldots,n$ , $x_i=y_i$ ومنه

$x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n=y_1u_1+y_2u_2+\ldots+y_nu_n$ وبالتالي $u=v$ وبالتالي تحقق الاقتضاء :

$\varphi(u)=\varphi(v) \Rightarrow u=v$ فالتطبيق $\varphi$ متباين .

**غامر :** لأنه من أجل أي عنصر $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ يوجد عنصر

$u=x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n\in E^n$ بحيث $\varphi(u)=x$ .

مما سبق نجد أن التطبيق $\varphi$ إيزومورفيزم من $E^n$ في $R^n$ .

الآن ، لتكن $M\subset E^n$ مجموعة محدودة ولنثبت أنها شبه متراصة ، لتكن $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر

$M$ عندئذٍ يكون $u^N=\alpha_1^Nu_1+\alpha_2^Nu_2+\ldots+\alpha_n^Nu_n$ من أجل $N=1,2,\ldots$ حيث

$N=1,2,\ldots$ , $j=1,2,\ldots,n$ , $\alpha_j^N\in R$ وبما أن $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ عناصر من المجموعة المحدودة

$M$ فإن $N=1,2,\ldots$ , $\|u^N\|_{E^n}<c$ , $\exists c>0$ ولكن $\|u^N\|_{E^n}=\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ وبالتالي

العملية بالتدريج فنحصل على المتتالية $M=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $\|x_n\|=1$ و $\|x_n-x_m\|\geq 1-\varepsilon$

وذلك أيا كان $n,m=1,2,\ldots$ وبالتالي $\|x_n-x_m\|\geq\frac{1}{2}$ ، أي أننا حصلنا على المجموعة المحدودة $M$

( لأن $\|x_n\|=1$ ) ولكنها ليست شبه متراصة لأنه لا توجد في $M$ أي متتالية جزئية متقاربة ، وهذا

تناقض مع الفرض بأن كل مجموعة محدودة شبه متراصة ، وهو المطلوب .

**مبرهنة ( تمرين ) :** كل مجموعة محدودة $M\subset E^n$ شبه متراصة .

16/15

اهتمام

**الاثبات :** ( في حال كان $E$ حقيقي ) : بما أن $E^n$ فضاء خطي ذو $n$ بعد فتوجد قاعدة

مكونة من $n$ عنصر وهي $u_1,u_2,\ldots,u_n$ وبالتالي $\forall u\in E^n$ فإنه توجد $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in R$ بحيث

$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_nu_n$ ويكون $\|u\|_{E^n}=\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ، وبالتالي من أجل أي عنصر

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ يوجد $u=x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n\in E^n$ ، لنأخذ التطبيق :

$$\varphi:E^n\to R^n:u=x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n\mapsto\varphi(u)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x$$

فنجد أن هذا التطبيق :

**معرف تماماً :** لأنه مهما يكن $u=x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n,v=y_1u_1+y_2u_2+\ldots+y_nu_n\in E^n$

بحيث $u=v$ فإن $x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n=y_1u_1+y_2u_2+\ldots+y_nu_n$ وبالمطابقة نجد ان

$x_i=y_i\quad,\quad i=1,2,\ldots,n$ وبالتالي $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ أي أن $\varphi(u)=\varphi(v)$

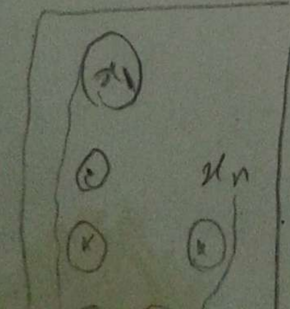
وبالتالي تحقق الاقتضاء : $u=v\ \Rightarrow\ \varphi(u)=\varphi(v)$ فالتطبيق $\varphi$ معرف تماما .

أو نأخذ عنصرين متطابقين ونثبت أنهما صورتين لعنصرين مختلفين بالشكل الثاني المساواة

**خطي :** لأنه مهما يكن $u=x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n,v=y_1u_1+y_2u_2+\ldots+y_nu_n\in E^n$ ومهما

يكن $\lambda,\mu\in R$ فإن :

$$\varphi(\lambda u+\mu v)=\varphi(\lambda x_1u_1+\lambda x_2u_2+\ldots+\lambda x_nu_n+\mu y_1u_1+\mu y_2u_2+\ldots+\mu y_nu_n)\ \Rightarrow$$



فضاء $R^n$

بعد n

**الإثبات :** ليكن $u \in X \setminus Y$ وليكن $d = d(u, Y)$ عندئذٍ $d = \inf_{y \in Y} \|u - y\|$ وبالتالي فإن $d > 0$

( لأنه لو كان $d = 0$ لكانت $u$ نقطة تراكم لـ $Y$ ولكن $Y$ مغلقة ، وبالتالي $u \in Y$

وهذا مخالف للفرض ) من هذه العلاقة ، ومن أجل $\delta > 0$ يوجد $y_\delta \in Y$ بحيث يكون :

$d < \|u - y_\delta\| < d + \delta$ ، ولنأخذ $x = \dfrac{u - y_\delta}{\|u - y_\delta\|}$ ، واضح أن $\|x\| = 1$ وفي هذه الحالة $x \notin Y$

( لأنه لو كان $x \in Y$ لكان $u - y_\delta \in Y$ وكون $Y$ مغلقة يكون $u - y_\delta + y_\delta = u \in Y$

وهذا مخالف للفرض ) لنأخذ العنصر $y \in Y$ هذا يعني أن $y_\delta + \|u - y_\delta\| y \in Y$ وبالتالي فإن :

$$\|x - y\| = \left\| \frac{u - y_\delta}{\|u - y_\delta\|} - y \right\| = \frac{1}{\|u - y_\delta\|} \left\| u - (y_\delta + \|u - y_\delta\| y) \right\| \geq \frac{1}{\|u - y_\delta\|} d \geq \frac{d}{d + \delta} = 1 - \frac{\delta}{d + \delta}$$

فلو أخذنا $0 < \varepsilon = \dfrac{\delta}{d + \delta} < 1$ لكان $\|x - y\| \geq 1 - \varepsilon$ وهو المطلوب .

**مبرهنة :** يكون الفضاء الخطي المنظم منتهي الأبعاد إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة محدودة هي مجموعة شبه متراصة .

**الإثبات :** **لزوم الشرط :** لتكن $M$ مجموعة محدودة من الفضاء الخطي المنظم المنتهي الأبعاد $X$ فواضح حسب مبرهنة بولزانو – فايرشتراس أن $M$ شبه متراصة وهو المطلوب .

**كفاية الشرط :** لنفرض أن كل مجموعة محدودة في الفضاء الخطي المنظم $X$ هي مجموعة شبه متراصة ولنثبت أن $X$ منتهي الأبعاد ، لنفرض جدلاً أن $X$ غير منتهي الأبعاد ولنأخذ $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ وليكن $x_1 \in X$ عنصر اختياري من $X$ بحيث $\|x_1\| = 1$ وبالتالي هذا العنصر يولد فضاء خطي جزئي مغلق $X_1$ مولد بالعنصر $x_1$ ( أي أن $X_1 = [x_1]$ ) وبُعد هذا الفضاء يساوي الواحد ، وحسب مُبرهنة ريس فإنه يوجد $X_1 \not\ni x_2 \in X$ بحيث $\|x_2\| = 1$ ويكون $\|x_2 - x_1\| \geq 1 - \varepsilon$ ، لنأخذ العنصرين $x_1, x_2$ إنهما يولدان فضاء خطياً جزئياً مغلقاً في $X$ وهو $X_2$ بحيث $X_2 = [x_1, x_2]$ وحسب مبرهنة ريس يوجد $x_3 \in X$ بحيث $\|x_3\| = 1$ ويكون $\|x_3 - x_2\| \geq 1 - \varepsilon$ و $\|x_3 - x_1\| \geq 1 - \varepsilon$ ، نتابع هذه

دوماً التقارب قوي ما لم يذكر خلاف ذلك .



**الحل :** في الفضاء $X=\ell_2$ لدينا المجموعة $M=\{e_1,e_2,...\}$ حيث $e_1=(1,0,0,...)$ و $e_2=(0,1,0,...)$ وهكذا ، واضح أن هذه المجموعة محدودة لأن $k=1,2,...$ ، $\|e_k\|=1$ ولكن هذه المجموعة ليست شبه متراصة لأن :

$k,i=1,2,...$ ، $\|e_k-e_i\|^2=2=\|e_k\|^2+\|e_i\|^2$ وبالتالي فإن $\|e_k-e_i\|\longrightarrow\sqrt{2}\neq 0$ وذلك أيا كان $k,i=1,2,...$ ، أي أنه لا يمكن الحصول على متتالية جزئية متقاربة من المتتالية $M$ ( لأنها ليست متتالية أساسية وبالتالي ليست متقاربة ) .

**مبرهنة :** إذا كانت المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ شبه متراصة ، ومتقاربة بضعف من $x_0$ فهي متقاربة بقوة من $x_0$ أي أن $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ .

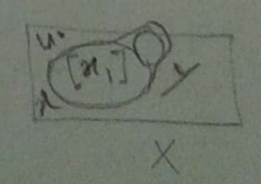
**الإثبات :** لنفرض جدلاً أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متقاربة بقوة من $x_0$ وبما أنها شبه متراصة فيوجد متتالية جزئية من $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ولتكن $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ تكون متقاربة من $y_0$ أي $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=y_0$ وبالتالي فهي متقاربة بضعف من $y_0$ وبما أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بضعف من $x_0$ فإن نهاية $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ هي أيضاً $x_0$ وبالتالي $x_0=y_0$ وهو المطلوب .

**ملاحظة :** من مبرهنة بولزانو – فايرشتراس نستنتج أن كل مجموعة محدودة $R^n\supset M$ تكون شبه متراصة ، وإذا كانت مغلقة ، تكون متراصة ، وبالتالي فإن خاصتي المحدودية والتراص في الفضاء منتهي البعد متكافئتان ، وبالتالي يمكن تعيين بُعد الفضاء ( يوجد إيزومورفيزم بين $R^n$ و $E^n$ بحيث $E^n\ni x=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n \mapsto (a_1,a_2,...,a_n)\in R^n$ وبالتالي توجد علاقة تكافؤ وبالتالي توجد صفوف تكافؤ عددها هو بعد الفضاء ) .

أهم مبرهنة **مبرهنة ريس :** ليكن $X$ فضاء خطي منظم ، وليكن $Y$ فضاء خطي جزئي من $X$ محتوى تماماً في $X$ أي $Y\subset X$ عندئذٍ من أجل أي عدد $0<\varepsilon<1$ يوجد عنصر $x$ بحيث $\|x\|=1$ وبحيث $\|x-y\|\geq 1-\varepsilon$ وذلك أيا كان $y\in Y$ ( أي أن $d(x,Y)\geq 1-\varepsilon$ ) .

X Y





X

$u\in X\setminus Y$

# المحاضرة (٢)

**تعاريف :**

**المجموعة المحدودة :** لتكن $M$ مجموعة جزئية من فضاء خطي منظم $X$ أي $M \subset X$ عندئذٍ نقول عن $M$ أنها محدودة في $X$ إذا وجد $c > 0$ بحيث يتحقق الشرط $\|x\| < c$ وذلك أيا كان $x \in M$ .

**المجموعة المغلقة :** نقول عن $M$ أنها مغلقة إذا كانت نهاية أي متتالية متقاربة من $M$ تقع في $M$ ونكتب $M = \overline{M}$ .

**المجموعة شبه المتراصة ( المتراصة نسبيا ) :** نقول عن $M$ أنها شبه متراصة إذا وجدت في كل متتالية من $M$ متتالية جزئية متقاربة .

**المجموعة المتراصة :** نقول عن $M$ أنها متراصة إذا كانت شبه متراصة ومغلقة بآن واحد .

**أو :** نقول عن $M$ أنها متراصة إذا وجدت في كل متتالية من $M$ متتالية جزئية متقاربة من عنصر من $M$ .

**نتيجة :** إذا كانت $M$ محدودة وشبه متراصة فإن $\overline{M}$ متراصة .

**مبرهنة :** كل مجموعة شبه متراصة في فضاء خطي منظم تكون محدودة .

**الإثبات :** لتكن $M$ مجموعة شبه متراصة في الفضاء الخطي المنظم $X$ ولنفرض جدلا أنها غير محدودة ، عندئذٍ توجد متتالية من عناصر $M$ ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق $\|x_n\| > n \quad , \quad n = 1,2,..$ ولكن $M$ شبه متراصة فرضا وبالتالي توجد في المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة ولتكن $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ وهذا تناقض مع $\|x_n\| > n \quad , \quad n = 1,2,..$ وهو المطلوب .

**ملاحظة :** في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدودة هي شبه متراصة ، وخاصة إذا كان الفضاء غير منتهي الأبعاد ، والمثال التالي يؤكد صحة هذه الملاحظة .

**تمرين :** أعط مثالا على مجموعة محدودة ولكنها ليست شبه متراصة .

نحصل بالنهاية على نقطة تراكم $c(c_x, c_y)$ في $\mathbb{R}^3$ نقطة التراكم $c(c_x, c_y, c_z)$



$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \ell_{[a_N, b_N]} = \lim_{N \longrightarrow \infty} (b_N - a_N) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \left( \frac{b-a}{2^N} \right) = 0$$

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \ell_{[c_N, d_N]} = \lim_{N \longrightarrow \infty} (d_N - c_N) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \left( \frac{d-c}{2^N} \right) = 0$$

أي أن طول كل من المجالين يسعى إلى الصفر عندما $N \longrightarrow \infty$ ، ومن العلاقة الأخيرة نجد أن $\lim_{N \longrightarrow \infty} (b_N - a_N) = 0$ و $\lim_{N \longrightarrow \infty} (d_N - c_N) = 0$ وحسب مبرهنة المجالات المتداخلة فإنه توجد نقطة وحيدة $x_0$ تنتمي إلى كافة المجالات $[a_N, b_N]$ ونقطة وحيدة $y_0$ تنتمي إلى كافة المجالات $[c_N, d_N]$ وذلك أيا كان $N = 1, 2, \dots$ بحيث أن $\lim_{N \longrightarrow \infty} a_N = \lim_{N \longrightarrow \infty} b_N = x_0$ ، وبحيث أن $\lim_{N \longrightarrow \infty} c_N = \lim_{N \longrightarrow \infty} d_N = y_0$ وبالتالي النقطة $(x_0, y_0)$ تنتمي إلى كافة المستطيلات $\{R_N\}_{N=1}^{\infty}$ وفيما يلي سنثبت أن النقطة $(x_0, y_0)$ هي نقطة تراكم للمجموعة $M$ .

ليكن $(\alpha, \beta)$ مربعاً مفتوحاً مركزه النقطة $(x_0, y_0)$ وبما أن متتالية المربعات $\{R_N\}_{N=1}^{\infty}$ متداخلة فإن :

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} R_N = \lim_{N \longrightarrow \infty} R_N = \{(x_0, y_0)\} \subset (\alpha, \beta) \times (\alpha, \beta)$$

أي أن تقاطع جميع المربعات $\{R_N\}_{N=1}^{\infty}$ موجود ضمن $(\alpha, \beta) \times (\alpha, \beta)$ وبما أن كل مربع من هذه المربعات يحوي عدداً لا نهائياً من نقاط المجموعة $M$ فإن $(\alpha, \beta) \times (\alpha, \beta)$ يحوي عدداً لا نهائياً من نقاط المجموعة $M$ وبالتالي فإن $(x_0, y_0)$ نقطة تراكم للمجموعة $M$ وهو المطلوب .

**نتيجة :** في كل متتالية محدودة من عناصر $R^n$ توجد متتالية جزئية متقاربة .

لتكن المتتالية: $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{8}, 1, -1, \dots$

يمكننا كتابتها كاجتماع 3 متتاليات:

$-1, -1, -1 \longrightarrow -1$

$1, 1, 1 \longrightarrow 1$

$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \longrightarrow 0$

اذا دمجنا الأولى مع الثانية تصبح جزئية ولكن غير متقاربة ...

عندئذٍ نشكل المتتالية الجزئية من هذه المتتالية وهي $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث أن $n_1=m_1$ وحيث $n_2$ هو أول عدد من الأعداد $m_2,m_3,...$ يكبر $n_1$ و $n_3$ هو أول عدد من الأعداد $m_3,m_4,....$ يكبر $n_2$ ، وهكذا نحصل على المتتالية المتزايدة $n_1<n_2<n_3<...$ والمتتالية $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ الجزئية من $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ولذلك يكون $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} x_{n_k}=x_0$ وهو المطلوب .

**مبرهنة ( تعميم على مبرهنة بولزانو – فايرشتراس ) :** كل مجموعة محدودة وغير منتهية $R^n\supset M$ لها نقطة تراكم واحدة على الأقل ، وليس بالضرورة أن تنتمي إلى $M$ .

**الإثبات :** ( من أجل $n=2$ ) : لتكن $R^2\supset M$ مجموعة محدودة وغير منتهية وبالتالي يوجد مستطيل يحوي $M$ وليكن $M\subset R$ حيث :

$$R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b, c\le y\le d\}$$

ولنأخذ المستقيمين $x=\dfrac{a+b}{2}, y=\dfrac{c+d}{2}$ فنحصل على أربع مستطيلات ، وبما أن المجموعة $M$ غير منتهية فإن أحد هذه المستطيلات يحوي عدداً غيرَ منتهٍ من نقاط المجموعة $M$ وليكن هذا المستطيل هو $R_1$ نجزئ $R_1$ إلى أربع مستطيلات أخرى أحدها يحوي عدداً غيرَ منتهٍ من نقاط المجموعة $M$ وبالاستمرار بهذه العملية نحصل على متتالية المستطيلات المتداخلة $\{R_N\}_{N=1}^{\infty}$ بحيث :

$$R\supset R_1\supset R_2\supset ... \quad ; \quad R_N=[a_N,b_N]\times[c_N,d_N] \quad ; \quad N=1,2,...$$

وكل من هذه المستطيلات يحوي عدداً لا نهائياً من نقاط المجموعة $M$ ، وبالتالي طول كل المجالين $[a_N,b_N]$ و $[c_N,d_N]$ :

$$\ell_{[a_N,b_N]}=b_N-a_N=\frac{b-a}{2^N} \quad , \quad \ell_{[c_N,d_N]}=d_N-c_N=\frac{d-c}{2^N}$$

$R^2=[a,b]\times[a,b]$

$R^2=R\times R$

وبالتالي :

فإنه توجد نقطة وحيدة

تنتمي إلى كافة المجالات $[a_n, b_n]$ وذلك أيا كان $n = 1,2,...$ ولتكن هذه النقطة هي $x_0$

بحيث أن $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0$ ، وفيما يلي سنثبت أن النقطة $x_0$ هي نقطة تراكم

للمجموعة $M$ ، ولهذا الغرض يجب إثبات أن أي جوار للنقطة $x_0$ يحوي عدداً لا نهائياً من نقاط المجموعة $M$ (والجوارات في $R$ هي المجالات المفتوحة) .

ليكن $(\alpha, \beta)$ مجالاً مفتوحاً مركزه $x_0$ وبما أن متتالية المجالات $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ متداخلة فإن :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \lim_{n\to\infty}[a_n, b_n] = \{x_0\} \subset (\alpha, \beta)$$

أي أن تقاطع جميع المجالات $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ موجود ضمن $(\alpha, \beta)$ وبما أن كل مجال من هذه المجالات يحوي عدداً لا نهائياً من نقاط المجموعة $M$ فإن $(\alpha, \beta)$ يحوي عدداً لا نهائياً من نقاط المجموعة $M$ ولما كان $(\alpha, \beta)$ اختيارياً فإن $x_0$ نقطة تراكم للمجموعة $M$ وهو المطلوب .

**مبرهنة :** في كل متتالية عددية محدودة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ توجد متتالية جزئية متقاربة $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث أن $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة أي أن $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ .

**الإثبات :** لتكن $M$ مجموعة حدود هذه المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ وبما أن هذه المتتالية محدودة ، فإذا كانت $M$ منتهية فنأخذ أحد الحدود مكررا عدداً غير منتهٍ من المرات وليكن هذا العنصر المكرر هو $x$ بحيث أن $x_{n_1} = x_{n_2} = x_{n_3} = ... = x$ فبذلك نكون قد حصلنا على متتالية جزئية متقاربة هي $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ لأن $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ ، وأما إذا كانت $M$ غير منتهية – وهي محدودة بالفرض – فحسب مبرهنة بولزانو – فايرشتراس فإن $M$ تملك نقطة تراكم $x_0$ وبالتالي توجد متتالية من عناصر $M$ متقاربة من $x_0$ ولتكن هذه المتتالية هي $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ حيث $\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = x_0$ و $x_{m_1}, x_{m_2}, ...$ مختلفة عن بعضها

وبالتالي يوجد لهاتين المتتاليتين نهاية مشتركة ومحددة $c$ حيث $a_n \le c \le b_n$ وذلك أيا كان $n = 1,2,...$

أي أن $c$ نقطة وحيدة موجودة في كافة المجالات ، لأنها لو لم تكن وحيدة

ولو فرضنا جدلا أن هناك نقطة أخرى $c'$ تنتمي إلى كافة المجالات أي أن $a_n < c' < b_n$ ومنه فإن

$b_n - a_n \ge |c - c'| > 0$ ولكن لدينا حسب الفرض $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$ وبالتالي

$\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ أي أن $|c - c'| = 0$ وبالتالي $c = c'$ وهو المطلوب إثباته .

**مبرهنة ( بولزانو – فايرشتراس ) :** كل مجموعة محدودة وغير منتهية $M \subset R$ لها نقطة تراكم واحدة على الأقل .

**الإثبات :** بما أن $M$ محدودة فهي موجودة ضمن مجال $[a,b]$ ولتكن $c = \dfrac{a+b}{2}$ نقطة منتصف هذا المجال ، عندئذٍ نحصل على المجالين $[a,c],[c,b]$ وبما أن $M$ غير منتهية فإن أحد هذين المجالين يحوي عدداً غيرَ منتهٍ من نقاط المجموعة $M$ وليكن هذا المجال هو $[a_1, b_1]$ ولتكن $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ نقطة منتصف المجال $[a_1, b_1]$ عندئذٍ نحصل على المجالين $[a_1, c_1],[c_1, b_1]$ وبما أن $M$ غير منتهية فإن أحد هذين المجالين يحوي عدداً غيرَ منتهٍ من نقاط المجموعة $M$ وليكن هذا المجال هو $[a_2, b_2]$ وبالاستمرار في عملية التنصيف نحصل على متتالية المجالات المتداخلة $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ لأن :

$$[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ...$$

وكل من هذه المجالات يحوي عدداً غيرَ منتهٍ من نقاط المجموعة $M$ وبالتالي فإن طول المجال $[a_n, b_n]$ هو $\ell_n = b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ وبالتالي

$\lim\limits_{n \to \infty} \ell_n = \lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$ أي أن طول المجال يسعى إلى الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$ ، ومن العلاقة الأخيرة نجد أن $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ وحسب مبرهنة المجالات المتداخلة

ما نحتاجه من التابعي ١ : شكل النظيم وشكل الجداء الداخلي وأي وحيد .



## المحاضرة (١)

## المجموعات المتراصة في الفضاءات الخطية المنظمة :

**توطئة :** لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة ، ولتكن $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متناقصة ، بحيث أن $x_n, y_n \in R$ وذلك أياً كان $n = 1,2,\ldots$ ، بحيث تحقق هاتان المتتاليتان الشرطين :

1. أياً كان $n = 1,2,\ldots$ فإن $x_n < y_n$ .
2. $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0$ .

عندئذ توجد للمتتاليتين نهاية مشتركة ومحددة $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0$ .

**الإثبات :** لدينا فرضاً $x_n < y_n < y_1$ وبالتالي المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة من عنصر وليكن $x_0$ أي أن $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ ، كما أنه فرضاً ينتج أن $y_n > x_n > x_1$ وبالتالي المتتالية $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من عنصر وليكن $y_0$ أي أن $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$ ، وبالتالي مما سبق وحسب (2) نجد أن $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0 = x_0 - y_0$ وبالتالي $x_0 = y_0$ أي أن $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0 = y_0$ وهو المطلوب إثباته .

**مبرهنة المجالات المتداخلة :** لتكن $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من المجالات المتداخلة أي أن $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$ وذلك أياً كان $n = 1,2,\ldots$ فإذا كانت $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$ ، فعندئذ يكون لمتتاليتي طرفي المجال $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ نفس النهاية $c$ ، وهذه النقطة $c$ هي النقطة الوحيدة التي تنتمي إلى كافة المجالات .

**الإثبات :** حسب التمهيدية يمكن النظر إلى المتتاليتين $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ على أن المتتالية $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة والمتتالية $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

